# 序　言

这本五万多字的小册子，估计在成功的情况下将变成中学数学分析的教科书。本书的内容，能够包括同一教学大纲的任何一种不同的版本。本书不从极限的定义和它的计算法则开始。书中把极限解释为明显的自然而然的东西，并在切线和导数的定义中阐明。由此，开始了本书的叙述。继而，计算多项式的导数、三角函数的导数，给出积、商以及复合函数的微分法则，并在其中间证明罗尔定理和拉格朗日公式。在这个基础上研究函数，寻求递增区间和递减区间，极大值和极小值。积分定义为三种不同的说法：微分的逆运算，图形的面积，有穷和的极限。此后，很仔细地研究函数 $e^x$，把它作为多项式序列 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 当整数 $n$ 趋向于无穷大时的极限。计算函数 $e^x$、$\ln x$ 的导数，最后给出各节的练习题。题目虽然不多，但有时是相当困难的。书中不强调逻辑上的严密性，但强调计算的方法。作为一本通俗的书，能够供初学数学分析的读者使用。因为我自己无论什么时候都不曾在中学里任教，当写本书的时候，我以有资格的数学家的合理的看法和我在中学期间对分析认识的亲身回忆为指针。虽然当时在中学里并不教授分析，我也是在进入大学以后才对它有了足够认识的。知道了什么是导数，什么是积分，并学会了利用这些工具解题。当时，关于极限理论我还没有任何一点点概念。关于它的存

VISIT…

LANZAROTE
Caliente.com

在我还是在大学里才知道并对这一点曾非常惊奇。在中学里，我认为不应该从极限理论开始讲述分析。必须明白，历史上的极限理论是在已经有了分析之后，作为增添的理论而出现的。仔细研究象极限和连续函数那样的现象，可能引到没有趣味的地步，甚至引起厌恶。记得，当我还是中学生的时候，不知是在哪一节分析课中，我猜透了关于连续函数取得所有中间值定理的证明。这一猜测致使我当时极其莫名其妙，也非常激动。思维健全的人应该领悟到函数的图象，就象没有缺口的金属薄片的装饰边那样好。当对图象的概念有了这样的认识时，在凸起部分的切线应该被认识到象尺子的边缘那样，紧紧靠着薄片边缘凸起的部分。因此，无论是切线的存在，也无论是导数的存在，都不应该产生疑问。正是这样，那个薄片面积的存在不应该产生疑问。因此，其中积分的存在就没有疑问。我想过，当中学生学习几何的时候，领会了由细长的金属薄片做成的三角形，比如能够把它拿在手中，移动到另一位置并翻转一个面。这不是说三角形的定义就应该如此，但是，我觉得对它的感觉应该正是这样的。根据这样的教学见解，我不从极限的定义开始阐述分析，而从切线和导数的定义开始。

我觉得，应该列入中学教学大纲的只是从第一节至第七节中所阐述的知识。函数 $e^x$ 的使人信服的描述，费去了从第八节到第十节的篇幅，我好象觉得过分的复杂。虽然如此，根据大纲的要求，我还是给出了它，恰恰也是为了完成中学教学大纲的要求，我引证了关于极限和连续函数的某些知识，但是仅限于在第十三节践中。

在结束语中，我对 B.P. 捷列斯尼娜表示感谢，在书的写法和编辑中，她给予我很大的帮助。

# 目　录

序　言 …… i
§1. 导数 …… 1
§2. 多项式导数的计算 …… 8
§3. 极大值和极小值。罗尔定理和拉格朗日公式 …… 13
§4. 函数的研究 …… 20
§5. 三角函数的导数与某些微分法则 …… 28
§6. 不定积分 …… 35
§7. 定积分 …… 41
§8. 收敛公设 …… 47
§9. 牛顿二项式与几何级数的和 …… 51
§10. 函数 $e^x$ …… 54
§11. 函数 $\ln x$ …… 62
§12. 函数 $e^x$ 的级数展开式 …… 64
§13. 跋。关于极限理论 …… 66
练习题 …… 70

# §1.

## 导　　数

当研究函数时，它的导数起着重要的作用。如果给定某一函数

$$y=f(x), \qquad (1)$$

便能够计算出称为函数 $f(x)$ 的导数的函数 $f'(x)$。$f'(x)$ 的值描述 $y$ 值相对于 $x$ 值的变化而变化的速度。当然，这不是导数的定义，而只是某些导数的直观的描述。考察一个特例就可以确信这一描述。如果依赖关系 (1) 是正比例关系 $y=kx$，那么 $y$ 对于 $x$ 的变化速度自然为 $k$，即在这种情况下，我们应该有 $f'(x)=k$。这时，导数具有明显的力学意义。如果把 $x$ 理解为时间，而把 $y$ 理解为在这段时间内所通过的路程，那么 $k$ 就表示质点运动的速度。在这里 $y$ 对于 $x$ 的变化速度 $f'(x)$ 是一个常数值，但是当量 $y$ 对于量 $x$ 的依赖关系(1)比较复杂时，导数 $f'(x)$ 本身又是变量 $x$ 的函数。

导数适用于物理过程的研究，其中各物理量变化时，它们的变化速度起着重要的作用。但是，我们还是从导数的几何应用开始，并在这个实例中比较详细地说明导数概念本身。

**导数和切线**　在笛卡儿平面直角坐标系中，作出函数 $f(x)$（见(1)）的图象。为此，象平常一样，在图形的平面上，作水平轴为横坐标轴，选择由左向右的方向为横坐标的方向，而竖直的轴为纵坐标轴，选择从下往上的方向为纵坐标的方向（图 1）。在这个坐标系中，函数 $f(x)$ 的图象是一条曲线，我们用 $L$ 表示。摆在自己面前的问题是：给出在曲线 $L$ 上

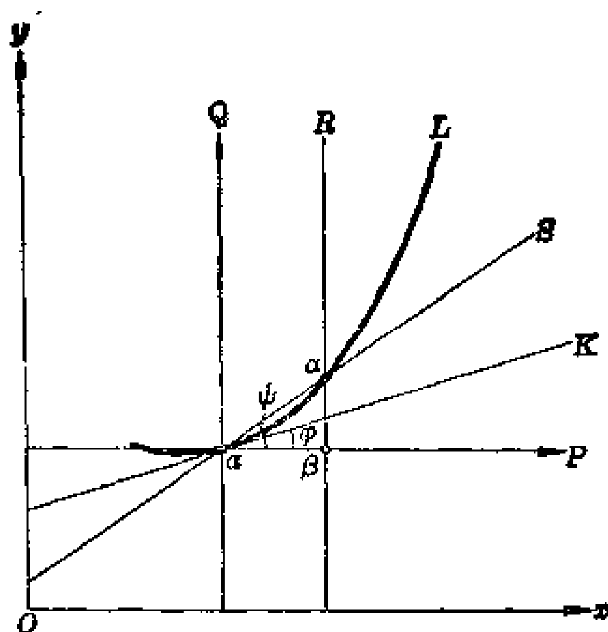



图 1

某一点 $a$ 处的切线的合理的定义，以及计算由这条切线决定的量。为了合理的定义切线，我们选择点 $a$ 附近的点，暂时认为点 $a$ 是不动的，在它附近但与它有区别的动点为 $\alpha$。通过点 $a$ 和 $\alpha$ 的直线 $S$ 称为曲线 $L$ 的割线，因为直线与曲线相交于两点 $a$ 和 $\alpha$。属于曲线 $L$ 的点 $\alpha$ 可能处在点 $a$ 的右边，也可能处在点 $a$ 的左边。从现在开始，使点 $\alpha$ 沿着曲线 $L$ 运动，不受限制地趋近于曲线上的点 $a$。当点 $\alpha$ 这样运动时，通过定点 $a$ 和动点 $\alpha$ 的割线 $S$，一方面旋转，一方面无限地趋近于通过定点 $a$ 的某一条直线 $K$。这条直线 $K$ 就叫做曲线 $L$ 在点 $a$ 处的切线。切线 $K$ 通过定点 $a$，因此对它足够确切的描述是，计算这条直线与横坐标轴的倾角 $\varphi$，更确切地说，是计算这条直线与横坐标轴的倾角的正切 $\mathrm{tg}\varphi$。

为了计算 $\mathrm{tg}\varphi$ 的值，我们预先算出割线 $S$ 与横坐标轴的

倾角 $\psi$ 的 $\operatorname{tg}\psi$。点 $a$ 的横坐标和纵坐标分别用 $x$ 和 $y$ 记为：

$$a=(x,y), \tag{2}$$

其中 $x$、$y$ 满足关系式(1)，因为点 $a$ 在函数 $f(x)$ 的图象 $L$ 上。类似地，点 $\alpha$ 的横坐标和纵坐标用 $\xi$ 和 $\eta$ 记为：

$$\alpha=(\xi,\eta), \tag{3}$$

其中 $\xi$、$\eta$ 满足关系式

$$\eta=f(\xi), \tag{4}$$

因为点 $\alpha$ 同样是在函数 $f(x)$ 的图象 $L$ 上。现在通过点 $a$ 有两条直线即水平直线 $P$ 和竖直直线 $Q$。这两条直线分别平行于原来坐标系的横坐标轴和纵坐标轴。我们选取这两条直线的方向为对应的原来坐标轴的方向。把直线 $P$ 和 $Q$ 作为横坐标轴和纵坐标轴，在我们图形的平面上，其本身又确定了以点 $a$ 为原点的某一新的坐标系。割线 $S$ 不能是竖直的，所以很明显，就是说选取割线 $S$ 的方向是由左向右的。由于新的横坐标轴 $P$ 平行于原横坐标轴，那么为了计算角 $\psi$，我们只要计算直线 $P$ 的正方向和直线 $S$ 的正方向之间的夹角就足够了。这个角 $\psi$ 比直角小，但它可能是正的，也可能是负的。以 $P$ 和 $Q$ 为轴的新的坐标系把平面分为四个象限。如果割线 $S$ 从第三象限到第一象限，角 $\psi$ 是正的；如果割线 $S$ 从第二象限到第四象限，角 $\psi$ 是负的。在新的坐标系中，点 $\alpha$ 的横坐标和纵坐标的值分别等于

$$(\xi-x),(\eta-y)。 \tag{5}$$

为了计算角 $\psi$，过点 $\alpha$ 引直线 $P$ 的垂线 $R$，直线 $R$ 与直线 $P$ 的交点记为 $\beta$。研究平面直角三角形 $a\beta\alpha$，其中 $\beta$ 是直角的顶点。如果不顾及角 $\psi$ 的符号，那么它就等于我们的三角形在顶点 $a$ 处的角 $\beta a\alpha$。这个角的正切等于直角边 $\beta\alpha$ 的长 $l(\beta\alpha)$ 除以直角边 $a\beta$ 的长 $l(a\beta)$。这样一来，我们有公式

$$|\mathrm{tg}\psi| = \frac{l(\beta\alpha)}{l(a\beta)}. \tag{6}$$

$l(\beta\alpha)$ 的长是点 $\alpha$ 在新坐标系中纵坐标的绝对值，即等于 $|\eta - y|$（见(5)）。$l(a\beta)$的长等于点 $\alpha$ 在新坐标系中横坐标的绝对值，即等于 $|\xi - x|$。这样一来，由(6)式得出

$$|\mathrm{tg}\psi| = \frac{|\eta - y|}{|\xi - x|}. \tag{7}$$

现在我们证明，

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{\eta - y}{\xi - x}. \tag{8}$$

为此我们指出：如果点 $\alpha$ 在第一象限或者第三象限，那么它的横坐标和纵坐标具有相同的符号，因而，等式(8)的右端是正的。在这种情况下，因为角 $\psi$ 是正的，所以 $\mathrm{tg}\psi$ 的值也是正的。如果点 $\alpha$ 在第二象限或者第四象限，那么它的横坐标和纵坐标（见(5)）具有不同的符号，所以等式(8)的右端是负的。但是在这种情况下因为角 $\psi$ 是负的，所以 $\mathrm{tg}\psi$ 也是负的。因此，公式(8)得证。现在把其中的 $y$ 和 $\eta$ 的值用公式(1)和(4)替代。我们就得到

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}. \tag{9}$$

当点 $\alpha$ 无限趋近于点 $a$ 时，它的横坐标 $\xi$ 也无限趋近于点 $a$ 的横坐标 $x$。最终记为：

$$\xi \to x. \tag{10}$$

为了求出 $\mathrm{tg}\varphi$ 的值，需要计算当 $\xi \to x$ 时 $\mathrm{tg}\psi$ 所达到的值。这一点可用公式的形式记为：

当 $\xi \to x$ 时，　　$\mathrm{tg}\psi \to \mathrm{tg}\varphi$. (11)

在高等数学中，由两个公式组成的最后的关系，记为一个公式

$$\lim_{\xi \to x} \mathrm{tg}\psi = \mathrm{tg}\varphi, \tag{12}$$

或者把公式(9)代入上式替代 $\operatorname{tg}\psi$，把最后的等式重记为公式

$$\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}。\tag{13}$$

lim 是拉丁语 limit 的缩写，它的中文意思是极限。

为了严格描述(13)式的运算，引进分式

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x},\tag{14}$$

我们需要准确地定义符号→，即说明变量对某一个常数的趋向。但是，在这里我们应当直观地理解这一过程。必须指出，在公式(14)中，不能简单地取 $\xi=x$，因为当 $\xi=x$ 时，我们得到的分式的分子和分母都等于零，所以必须研究值 $\xi$ 趋近于常数 $x$ 的过程，并注意这时量(14)的性质。

为了阐明在简单的例子中极限变化的概念，我们研究当函数 $f(x)$ 以公式

$$y=f(x)=x^2\tag{15}$$

给出时的情况。

在这种情况下分式(14)记为

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\frac{\xi^2-x^2}{\xi-x}=\xi+x。\tag{16}$$

上式的右边已经能够用 $x$ 的值替代 $\xi$ 的值，并且我们不会得到无意义的关系式 $\frac{0}{0}$。因此，在这种特殊的情况下，我们有

$$\lim_{\xi\to x}\frac{\xi^2-x^2}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}(\xi+x)=2x。\tag{17}$$

因此，我们确定

$$当\ \xi\to x\ 时，\frac{\xi^2-x^2}{\xi-x}\to 2x,\tag{18}$$

或者，同样的，

$$\lim_{\xi \to x} \frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} = 2x. \tag{19}$$

值
$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{20}$$

称为任意函数 $f(x)$ 在点 $x$ 处的导数，并用 $f'(x)$ 标记。所以，按定义我们有

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}. \tag{21}$$

这样一来，公式(19)表明对函数(15)

$$f'(x) = 2x. \tag{22}$$

应该注意到在公式(21)中，我们没有单独地研究 $\alpha$ 从右边趋近于 $a$ 和 $\alpha$ 从左边趋近于 $a$ 时的两种情况。在第一种情况下，$\xi$ 逐渐减少地趋近于 $x$，而在第二种情况下，$\xi$ 逐渐增加地趋近于 $x$。当 $\xi$ 按这些方式趋近于 $x$ 时，导数的计算结果应当是一样的，仅仅当在点 $x$ 的导数被认为是存在时才是这样。然而，能够轻易地指出那样的函数，对这样的函数从左边和从右边趋近给出不同的结果。作为例子，我们研究由方程

$$y = f(x) = |x| + x^2 \tag{23}$$

所给出的函数 $f(x)$。我们计算当 $x = 0$ 时这个函数的导数。在这种情况下我们有

$$\frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{|\xi| + \xi^2}{\xi} = \frac{|\xi|}{\xi} + \xi. \tag{24}$$

当 $\xi$ 为正数时 $|\xi| = \xi$，当 $\xi$ 为负数时 $|\xi| = -\xi$。因此，我们有

当 $\xi > 0$ 时，
$$\frac{|\xi|}{\xi} = +1 \tag{25}$$

和当 $\xi < 0$ 时，
$$\frac{|\xi|}{\xi} = -1. \tag{26}$$

于是，

当 $\xi>0$ 时，有
$$\lim_{\xi\to+0}\frac{|\xi|+\xi^2}{\xi}=+1, \tag{27}$$

当 $\xi<0$ 时，有
$$\lim_{\xi\to-0}\frac{|\xi|+\xi^2}{\xi}=-1。 \tag{28}$$

因而，量(24)的极限依赖于 $\xi$ 趋近于 0 的方向：是从右边或是从左边。在这种情况下认为在点 $x=0$ 处给定的函数 $f(x)$ (见(23))没有导数，而相应的图象也没有切线。当公式(21)没有确定的值 $f'(x)$ 时，常出现更复杂的情况。但是，在以后我们具有的仅是这样的函数问题，对于这种函数公式(21)确定 $f'(x)$ 的值，即函数 $f(x)$ 的导数是存在的。

求出函数 $f(x)$ 的导数的运算（见(21)）通常称为函数 $f(x)$ 的微分法。所以，具有导数的函数称为是可微的。今后我们所研究的所有的函数都是可微的。

# §2.

## 多项式导数的计算

在这里我们计算函数

$$y = f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

的导数，即具有常系数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 的 $x$ 的任意多项式的导数。这时，对函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$，利用某些记号的变换有时是比较方便的。也就是说，我们有时用 $(f(x))'$ 标记这个导数，即

$$f'(x) = (f(x))'. \qquad (2)$$

利用这些符号，现在我们能够把§1中的(15)和(22)这两个公式记入一个公式

$$(x^2)' = 2x.$$

首先，我们计算缩减为一项的最简单的 $n$ 次多项式的导数。就是

$$y = f(x) = x^n. \qquad (3)$$

为了计算函数(3)的导数，我们利用一个很简单但是又很重要的代数公式，在这里导出它的证明。

为了写出并证明这个代数公式，我们观察以公式

$$\varphi_k(u, v) = u^k + u^{k-1}v + \cdots + uv^{k-1} + v^k \qquad (4)$$

给出的两个变量 $u$ 和 $v$ 的多项式 $\varphi_k(u, v)$。这样一来，多项式 $\varphi_k(u,v)$ 就表示所有形如 $u^iv^j$ 的单项式的和，其中 $i$ 和 $j$ 为满足条件 $i+j=k$ 的非负整数。

多项式 $\varphi_k(u,v)$ 乘以值 $u$，即组成多项式

$$\varphi_k(u,v) \cdot u. \qquad (5)$$

这个多项式表示所有形如 $u^{i+1}v^j$ 的单项式的和，其中 $i$ 和 $j$ 是满足关系式 $i+j=k$ 的非负整数。这样，多项式(5)就表示所有形如 $u^pv^q$ 的单项式的和，其中 $p$ 和 $q$ 是满足关系式

$$p\geqslant 1,\quad p+q=k+1$$

的非负整数。由此可见，多项式(5)包含属于多项式 $\varphi_{k+1}(u,v)$的除去单项式 $v^{k+1}$ 以外的所有的项。因此，我们有等式

$$\varphi_k(u,v)\cdot u=\varphi_{k+1}(u,v)-v^{k+1}. \tag{6}$$

同样地，多项式 $\varphi_k(u,v)$乘以 $v$，我们得到公式

$$\varphi_k(u,v)\cdot v=\varphi_{k+1}(u,v)-u^{k+1}. \tag{7}$$

由等式(6)减去等式(7)，得

$$\varphi_k(u,v)(u-v)=u^{k+1}-v^{k+1}. \tag{8}$$

在这个等式中用 $n$ 代替 $k+1$，并把得到的关系式除以 $u-v$，我们便得到重要的公式

$$\frac{u^n-v^n}{u-v}=\varphi_{n-1}(u,v), \tag{9}$$

其中 $\varphi_{n-1}(u,v)$由公式

$$\varphi_{n-1}(u,v)=u^{n-1}+u^{n-2}v+\cdots+uv^{n-2}+v^{n-1} \tag{10}$$

确定。应该着重指出，在这里 $n\geqslant 1$，因为 $n=k+1$，其中 $k\geqslant 0$。记住，多项式 $\varphi_{n-1}(u,v)$含有的项数等于 $n$。

利用公式(9)，我们将不费力地计算出函数 $x^n$ 的导数。为此，依据§1(见§1(21))中阐明的法则，我们能够建立初步的关系式

$$\frac{\xi^n-x^n}{\xi-x} \tag{11}$$

并求出当 $\xi\to x$ 时这个关系式的极限。由代数公式(9)我们有

$$\frac{\xi^n-x^n}{\xi-x}=\xi^{n-1}+\xi^{n-2}x+\cdots+\xi x^{n-2}+x^{n-1}, \tag{12}$$

其中右边的项数等于 $n$。当 $\xi\to x$ 并过渡到极限时，我们应当

在等式(12)的右边用 $x$ 代替 $\xi$。这时，每一项 $\xi^i x^j$ 都变为项 $x^{n-1}$，其中 $i+j=n-1$。这样，我们得到

$$(x^n)'=\lim_{\xi\to x}\frac{\xi^n-x^n}{\xi-x}=nx^{n-1}$$

并且最后有

$$(x^n)'=nx^{n-1}。\tag{13}$$

在公式(13)的证明中，我们不会研究 $n=0$ 的情况，因为公式(9)仅当 $n\geqslant1$ 时是正确的。由此可见，函数 $x^0=1$ 的导数没有被我们计算。计算函数 $f(x)=C$ 的导数是比较简单的，其中 $C$ 为常数。对于这个函数我们有

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\frac{C-C}{\xi-x}=0。$$

这样就有

$$C'=0,\tag{14}$$

即常数的导数等于零。

为了由最简单的多项式 $x^n$ 变为一般的多项式(1)，我们应该引出两个普通的求导法则。即求两个函数的和的导数和求常数乘以函数的积的导数。这些法则如下，如果 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是两个函数，那么我们有

$$(f_1(x)+f_2(x))'=f_1'(x)+f_2'(x)。\tag{15}$$

用文字叙述为：两个函数的和的导数等于各被加项的导数的和。其次，如果 $C$ 是常数，而 $f(x)$ 是某个函数，那么有

$$(Cf(x))'=Cf'(x)。\tag{16}$$

用文字叙述为：常数乘以函数的积的导数等于常数乘以函数的导数的积。

我们首先证明法则(15)，有

$$(f_1(x)+f_2(x))'=\lim_{\xi\to x}\frac{f_1(\xi)+f_2(\xi)-(f_1(x)+f_2(x))}{\xi-x}$$

$$= \lim_{\xi\to x}\left[\frac{f_1(\xi)-f_1(x)}{\xi - x}+\frac{f_2(\xi)-f_2(x)}{\xi - x}\right]$$

$$= \lim_{\xi\to x}\frac{f_1(\xi)-f_1(x)}{\xi - x}+\lim_{\xi\to x}\frac{f_2(\xi)-f_2(x)}{\xi - x}$$

$$= f_1'(x)+f_2'(x).$$

这样，法则(15)被证明。类似地证明法则(16)，我们有

$$(Cf(x))' = \lim_{\xi\to x}\frac{Cf(\xi)-Cf(x)}{\xi - x}$$

$$= \lim_{\xi\to x} C\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}$$

$$= C\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} = Cf'(x).$$

这样，法则(16)也被证明。

由法则(15)和(16)可以推出一个总的法则。假设我们给出函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 和常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$，那么有下列法则：

$$(C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_mf_m(x))'$$
$$= C_1f_1'(x)+C_2f_2'(x)+\cdots+C_mf_m'(x). \tag{17}$$

归纳地进行这个法则的证明。当 $m=1$ 时，它与法则(16)相一致。其次，由法则(15)得

$$(C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_mf_m(x))'$$

$$= (C_1f_1(x)+\cdots+C_{m-1}f_{m-1}(x))'+(C_mf_m(x))'$$

$$= C_1f_1'(x)+\cdots+C_{m-1}f_{m-1}'(x)+C_mf_m'(x).$$

这里我们利用了归纳法，即假设数为 $m-1$ 时对于函数法则是正确的。因此，法则(17)得证。

利用法则(17)、(13)和(14)，我们能够求出多项式(1)的导数。我们有

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)'$$
$$= a_0(x^n)' + a_1(x^{n-1})' + \cdots + a_{n-1}(x)' + a_n'$$
$$= na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

这样一来，求多项式(1)的导数的法则最后记为

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)'$$
$$= na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}. \tag{18}$$

# §3.

## 极大值和极小值.罗尔定理和拉格朗日公式

由导数定义本身引出以下想法，它能够成为研究函数的良好手段。例如，若已知函数$f(x)$在点$x$处的导数$f'(x)$是正的，那么直观意义是明显的. 函数$f(x)$在这一点附近是递增的。特别是从导数的几何意义中可以看出这一点。函数$f(x)$的图象在对应点的切线指向往上。负导数的直观意义也是明显的，函数$y=f(x)$在点$x$附近是递减的。函数$f(x)$的图象在对应点的切线指向往下。我们说明导数的这些性质。

**正的导数和负的导数** 按照定义(见§1)，函数$f(x)$的导数$f'(x)$是关系式

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=k \qquad (1)$$

当$\xi\to x$时的极限。由此可见，如果$f'(x)\neq 0$，那么当$\xi$足够趋近于$x$时，关系式(1)即数$k$具有与$f'(x)$同样的符号。更确切地说，存在小到这样程度的正数$\varepsilon$，当

$$|\xi-x|<\varepsilon \qquad (2)$$

时，数$k$的符号与$f'(x)$的符号相同。等式(1)乘以数$\xi-x$，得到等式

$$f(\xi)-f(x)=k(\xi-x). \qquad (3)$$

这个等式右边的符号取决于它的因子的符号，即数$k$和$\xi-x$的符号。为了尽可能简略地包括在此产生的所有四种情况，我们选取数$\xi$满足条件(2)的任意两个值$\xi_1$和$\xi_2$。数$\xi_1$取在$x$的左边，$\xi_2$取在$x$的右边。这样，数$\xi_1$和$\xi_2$满足条件

$$x-\varepsilon<\xi_1<x<\xi_2<x+\varepsilon. \tag{4}$$

把数 $k$ 的符号理解为与导数 $f'(x)$ 的符号一致，并考虑到关系式(3)右边的符号，我们能够写出下列两个结果：

当 $f'(x)>0$ 时，有 $\quad f(\xi_1)<f(x)<f(\xi_2)$， (5)

当 $f'(x)<0$ 时，有 $\quad f(\xi_1)>f(x)>f(\xi_2)$。 (6)

口述结果(5)和(6)能够用下列形式描写：

当 $f'(x)>0$ 时，函数在点 $x$ 的左边比在点 $x$ 处小，而在点 $x$ 右边比在点 $x$ 处大。换句话说，函数在点 $x$ 处是递增的。

当 $f'(x)<0$ 时，函数在点 $x$ 的左边比在点 $x$ 处大，而在点 $x$ 右边比在点 $x$ 处小。换句话说，函数在点 $x$ 处是递减的。

我们注意，如果函数在点 $x$ 处是递增的，即它满足不等式(5)，那么比 $\dfrac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$ 是正数，并且当 $\xi\to x$ 时它始终是正的，能够趋近于零，所以，在函数递增的点 $x$ 处导数不一定是正的：它仅仅是非负的

$$f'(x)\geqslant 0. \tag{7}$$

正是这样，在函数递减的点 $x$ 处导数不一定是负的，但能够为零，所以在递减的点导数满足不等式

$$f'(x)\leqslant 0. \tag{8}$$

**极大值和极小值** 如果在足够趋近于点 $x$ 的所有点上，函数的值不超过它在点 $x$ 处的值，就说明函数在点 $x$ 有局部的极大值。或者，更精确地说，存在无论多么小的正数 $\varepsilon$，

当 $|\xi-x|<\varepsilon$ 时，有 $\quad f(\xi)\leqslant f(x)$ (9)

成立。

正是这样，如果对趋近于点 $x$ 的自变量的所有值，函数值都不小于在点 $x$ 的函数值，说明函数在点 $x$ 有局部的极小值。更精确地说，存在那样的正数 $\varepsilon$，

当 $|\xi - x| < \varepsilon$ 时，有 $$f(\xi) \geqslant f(x) \tag{10}$$
成立。

通常省略"局部的"一词，而简单说成关于函数的极大值和极小值。

看来，在极大值和极小值点上函数 $f(x)$ 的导数变为零：
$$f'(x) = 0. \tag{11}$$

实际上，在函数 $f(x)$ 的极大值点上不可能有正的导数，因为在正导数的情况下，函数在 $x$ 右边比在点 $x$ 处大（见(5)），于是点 $x$ 不是极大值点。同样地，在极大值的情况下，函数 $f(x)$ 不能有负的导数，因为在这种情况下，在点 $x$ 的左边它有比在点 $x$ 处的函数值大的值（见(6)）。只剩下一种可能性 $f'(x) = 0$，即等式(11)成立。

类似地，在极小值点上函数 $f(x)$ 不能有正的导数，因为这时在点 $x$ 左边函数的值比在点 $x$ 处小（见(5)）。同样地，它不能有负的导数，因为这时在点 $x$ 的右边函数有比在点 $x$ 处的函数值小的值（见(6)）。于是，只剩下一种可能性 $f'(x) = 0$，即有等式(11)成立。

这样一来，为了寻求函数具有极大值或极小值的自变量的值，应该研究满足等式(11)的所有的 $x$ 的值，其次再研究已经详细阐明的问题。

**罗尔定理** 对于两个不同的自变量 $x_1$ 和 $x_2$ 的值，如果函数 $f(x)$ 有相等的值，即成立等式
$$f(x_1) = f(x_2), \tag{12}$$
并且函数 $f(x)$ 定义在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上，那么在这个区间的内部可以找到 $\theta$ 值，使
$$f'(\theta) = 0. \tag{13}$$

术语"内部的值"，就是说，$\theta$ 与区间的端点 $x_1$ 和 $x_2$ 并不

一致，即无论是与数 $x_1$ 也无论是与数 $x_2$ 都不一致，而位于它们中间。

我们证明这个论断。如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上是常数，那么在该区间的任意一个内点上关系式 $f'(\theta)=0$ 成立（见§2(14)）。如果函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上不是常数，那么至少有下列两种情况中的一种成立。

第一种情况　在区间 $[x_1, x_2]$ 的某些点上函数 $f(x)$ 比在它的端点上大。

第二种情况　在区间 $[x_1, x_2]$ 的某些点上函数 $f(x)$ 比在它的端点上小。

在第一种情况下，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 的某一内点 $\theta$ 上有极大值，那么在这一点上等式(13)成立(见(11))。在第二种情况下，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 的某一内点 $\theta$ 上达到自己的极小值，那么在这个点上等式(13)成立(见(11))。这样一来，罗尔定理被证明。

以下的拉格朗日公式是罗尔定理的直接推论。

**函数有限增量的拉格朗日公式**　如果 $x_1$ 和 $x_2$ 是函数 $f(x)$ 的自变量的两个不同的值，并且函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上有定义，那么在区间 $[x_1, x_2]$ 的内部存在自变量的值 $\theta$，使等式

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\theta)(x_2-x_1) \tag{14}$$

成立。

为了证明这一论断，构造线性函数

$$g(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x, \tag{15}$$

并证明函数

$$f(x)-g(x) \tag{16}$$

在点 $x_1$ 和 $x_2$ 具有同样的值，即满足罗尔定理的条件。果然有

$$g(x_2)-g(x_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x_2-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x_1$$
$$=f(x_2)-f(x_1)。\tag{17}$$

其次，有

$$(f(x_2)-g(x_2))-(f(x_1)-g(x_1))$$
$$=(f(x_2)-f(x_1))-(g(x_2)-g(x_1))=0\tag{18}$$

(见(17))。这样一来，有

$$f(x_2)-g(x_2)=f(x_1)-g(x_1),\tag{19}$$

即函数(16)在区间 $[x_1, x_2]$ 的端点上有同样的值，因此，由罗尔定理知在区间 $[x_1, x_2]$ 内存在这样的 $\theta$ 值，

$$当\ x=\theta\ 时，(f(x)-g(x))'=0。\tag{20}$$

再次，我们有

$$g'(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}。\tag{21}$$

由公式(20)和(21)可得

$$0=f'(\theta)-g'(\theta)=f'(\theta)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}。$$

用 $x_2-x_1$ 乘以最后的关系式，我们得到被证明的关系式(14)。于是，拉格朗日公式得证。

拉格朗日公式是研究函数的有力工具，或者它的图形也是同样的。由拉格朗日公式我们做出两个重要的结论。

如果在区间 $[x_1, x_2]$ 上，其中 $x_1<x_2$，函数 $f(x)$ 在所有的点上都有正的导数，此外，在区间的端点上有定义，那么在整个区间 $[x_1, x_2]$ 上函数 $f(x)$ 是递增的。更确切地说，如果 $a_1$ 和 $a_2$ 是位于区间 $[x_1, x_2]$ 上的自变量的两个值，并且 $a_1<a_2$，那么有

$$f(a_1)<f(a_2)。\tag{22}$$

事实上，由公式(14)有

$$f(a_2)-f(a_1)=f'(\theta)(a_2-a_1), \tag{23}$$

并且$\theta$是区间$[a_1,a_2]$的内点，因而，也是区间$[x_1, x_2]$的内点。这样，等式(23)的右边是正的。我们的论断(22)得证。

如果在区间$[x_1, x_2]$上，其中$x_1<x_2$，函数$f(x)$到处都有负的导数，除了在区间$[x_1,x_2]$的端点以外是有定义的，那么在整个区间$[x_1, x_2]$上函数是递减的。更确切地说：如果$a_1$和$a_2$是位于区间$[x_1,x_2]$上的自变量的两个值，并且$a_1<a_2$，那么有

$$f(a_2)<f(a_1). \tag{24}$$

事实上，由公式(14)有

$$f(a_2)-f(a_1)=f'(\theta)(a_2-a_1), \tag{25}$$

其中$\theta$是区间$[a_1,a_2]$的内点，即区间$[x_1, x_2]$的内点。这样一来，关系式(25)的右边是负的，因而，论断(24)得证。

**二阶导数**　函数$f(x)$的导数$f'(x)$本身又是函数，因此能够求出它的导数$(f'(x))'$。它就称为函数$f(x)$的二阶导数并用$f''(x)$标记。这样，

$$f''(x)=(f'(x))'. \tag{26}$$

$f'(x)$和$f''(x)$称为函数$f(x)$的一阶导数和二阶导数。类似地，能够定义函数$f(x)$的任意阶导数，但是我们将只使用一阶和二阶导数。

**区分极大值和极小值**　当$x=x_0$时为了使函数$f(x)$有极大值或极小值，必须有

$$f'(x_0)=0 \tag{27}$$

(见(11))。但这个等式不是使函数$f(x)$在点$x=x_0$处具有极大值或极小值的充分条件，除此之外，它没有给出区分极大值和极小值的可能性。原来二阶导数给出了充分条件，即，

如果

$$f''(x_0)\neq 0, \tag{28}$$

则当满足条件(27)时函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 或者有极大值，或者有极小值，而值 $f''(x_0)$ 的符号给出区分极大值和极小值的可能性，即，如果

$$f''(x_0)<0, \tag{29}$$

那么有极大值，而如果

$$f''(x_0)>0, \tag{30}$$

那么有极小值。

我们证明这个论断。如果等式(29)成立，那么函数 $f'(x)$ 的一阶导数 $(f'(x))'$ 是负的。此外，当 $x=x_0$ 时函数 $f'(x)$ 变为零(见(27))。这样，

当 $x<x_0$ 时，有 $\qquad f'(x)>0, \qquad (31)$

当 $x>x_0$ 时，有 $\qquad f'(x)<0. \qquad (32)$

于是，当函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的左边接近于 $x_0$ 时是递增的，而当它从点 $x_0$ 的右边离开 $x_0$ 时是递减的，因而，我们有极大值。类似地，如果等式(30)成立，那么函数 $f'(x)$ 的一阶导数 $(f'(x))'$ 是正的，并且当 $x=x_0$ 时函数 $f'(x)$ 变为零。这样，

当 $x<x_0$ 时，有 $\qquad f'(x)<0, \qquad (33)$

当 $x>x_0$ 时，有 $\qquad f'(x)>0. \qquad (34)$

于是，当函数 $f(x)$ 从左边接近于点 $x_0$ 时是递减的，而当它从点 $x_0$ 的右边离开 $x_0$ 时是递增的。因而，我们有极小值。

# § 4.

## 函数的研究

回忆函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 的定义，我们有

$$f''(x) = (f'(x))' \tag{1}$$

(见 § 3(26))。函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 分别称为函数 $f(x)$ 的一阶导数和二阶导数。

利用 § 3 对以多项式给出的某些函数研究的结果。我们首先研究函数

$$y = f(x) = x^3 - px, \tag{2}$$

其中 $p$ 是常数。这个函数的图象 $L$ 称为*立方抛物线*。

我们首先指出十分特殊但有明显性质的立方抛物线。立方抛物线关于坐标原点是中心对称的。事实上，如果点 $(x, y)$ 属于立方抛物线，即 $x$ 和 $y$ 的值满足方程(2)，那么点 $(-x, -y)$ 也满足这个方程。就是，有

$$(-y) = (-x)^3 - p(-x). \tag{3}$$

因此，属于曲线 $L$ 的点 $(x, y)$ 在曲线上关于坐标原点有对称点 $(-x, -y)$。

其次，求曲线 $L$ 和横坐标轴的交点，即求方程

$$x^3 - px = 0 \tag{4}$$

的根。这个方程有三个根

$$x = 0, \ x = \pm\sqrt{p}. \tag{5}$$

当 $p<0$ 时后两个根是虚根，所以没有几何意义。当 $p>0$ 时，(5)式所有的三个根都是不同的，因而，曲线 $L$ 和横坐标轴有三个交点。当 $p=0$ 时，三个根合并为一个三重根 $x=0$。

函数(2)的导数由公式

$$f'(x)=3x^2-p \tag{6}$$

给出。对于不同的 $x$ 值考察这个函数的符号，我们把函数 $f(x)$ 的曲线 $L$ 分为递增部分和递减部分，并求出极大值点和极小值点。无论哪一个目的我们都得求出方程

$$f'(x)=3x^2-p=0 \tag{7}$$

的根。

当 $p$ 为负数时，函数 $f'(x)$（见(6)）对任意 $x$ 的值都是正的，因而，函数 $f(x)$ 在 $x$ 变化的整个区间 $-\infty<x<+\infty$ 上是递增的。

当 $p=0$ 时，函数 $f'(x)$（见(6)）对 $x\neq0$ 的所有的值都是正的。这样，当 $-\infty<x<0$，$0<x<+\infty$ 时，它是递增的。因为在 $-\infty<x<0$ 上函数 $x^3$ 是负的，在 $0<x<+\infty$ 上是正的，所以函数在从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的 $x$ 变化的整个区间上都是递增的。

在点 $x=0$ 处，其中 $f'(x)=0$，函数 $f(x)$ 也是递增的。当 $x=0$ 时，其中 $f'(x)=0$，函数 $x^3$ 既不具有极大值也不具有极小值。由此很明显，§3 中的条件(11)对函数 $f(x)$ 在点 $x$ 取极大值或极小值是必要的，但不是充分的。

当 $p$ 为正数时，方程(7)有两个根

$$x_1=-\sqrt{\frac{p}{3}},\quad x_2=\sqrt{\frac{p}{3}}. \tag{8}$$

我们应该检验函数 $f(x)$ 在点 $x_1$ 和 $x_2$ 上有没有局部的极大值或极小值。也就是点 $x_1$ 和 $x_2$ 把 $x$ 的整个变化区间分为三部分

$$-\infty<x\leqslant x_1,\quad x_1\leqslant x\leqslant x_2,\quad x_2\leqslant x<+\infty. \tag{9}$$

在第一部分上函数 $f'(x)$ 是正的，在第二部分上是负的，在第

三部分上又是正的。因而，函数 $f(x)$ 在第一部分上是递增的，在第二部分上是递减的，在第三部分上又是递增的。由此也很明显，点 $x_1$ 是极大值点，而点 $x_2$ 是极小值点。由此可见，立方抛物线具有依赖于 $p$ 值的三种本质上不同的形式：第一种形式 $p<0$，第二种形式 $p=0$，第三种形式 $p>0$。图 2 上描绘出所有三种情况下的立方抛物线。

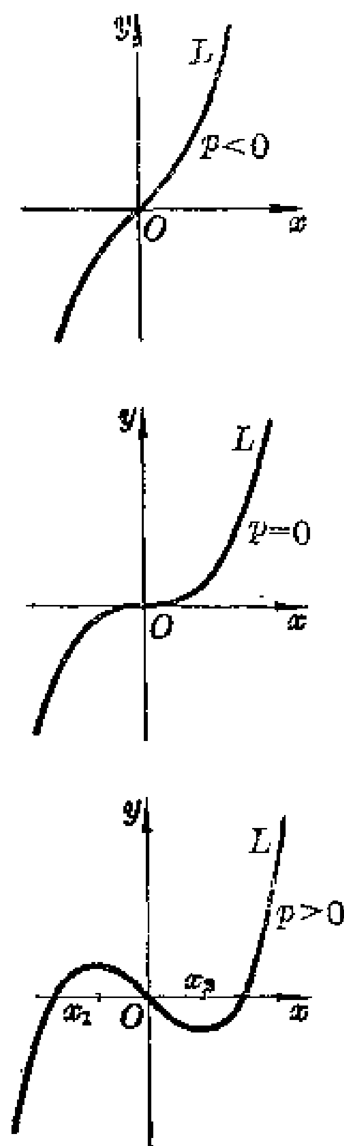


图 2

研究方程

$$x^3-px=C. \qquad (10)$$

几何上很明显，当 $p<0$ 时，这个方程仅有一个实根。当 $p=0$ 时，这个方程除了 $C=0$ 的情况以外，同样只有一个实根，当 $C=0$ 时有三重根 $x=0$。如果 $p>0$，方程(10)当

$$f(x_2)\leqslant C\leqslant f(x_1) \qquad (11)$$

时有三个根，并且在区间(11)上 $C$ 值的极端位置处有一个单根和一个二重根。在区间(11)之外方程(10)仅有一个实根。

立方抛物线(2)总是通过坐标原点的。它在坐标原点的倾角的正切由公式

$$f'(0)=-p \qquad (12)$$

确定。这样，方程

$$y=g(x)=-px \qquad (13)$$

表示切线本身。这条切线把整个坐标平面分为两部分：位于它上面的

部分和位于它下面的部分。如果

$$y^*>-px^*,\tag{14}$$

平面上的任意点$(x^*, y^*)$位于直线(13)的上面。如果

$$y^*<-px^*,\tag{15}$$

点$(x^*, y^*)$位于直线(13)的下面。我们说明，立方抛物线上的点$(x, y)$，即满足方程(2)的点，位于我们所研究的两个半平面中的某一个上。为了说明这个问题，我们应该把值

$$x^3-px\tag{16}$$

与值

$$-px\tag{17}$$

相比较。显然，当 $x<0$ 时，(16)的值比(17)的值小，而当 $x>0$ 时，(16)的值比(17)的值大。当 $x<0$ 时，立方抛物线上的点$(x, y)$满足条件(15)，即位于切线的下面，而当 $x>0$ 时，立方抛物线上的这个点满足条件(14)，即位于切线的上面。因而，在坐标原点立方抛物线从切线的一边转到它的另一边。在切点附近曲线从切线的一边变到另一边的现象具有普遍的价值。顺便得出它。

**拐点** 设 $L$是某一条曲线，$a$是这条曲线上的点，$K$是曲线 $L$ 在点 $a$ 处的切线(图3)。如果在点$a$附近，曲线 $L$从切线的一边转到另一边，那么点 $a$ 称为曲线 $L$ 的拐点。可以证明如果 $L$是某函数

$$y=f(x)\tag{18}$$

的图象，那么在曲线 $L$ 的拐点$a$上，点$a$的横坐标$b$满

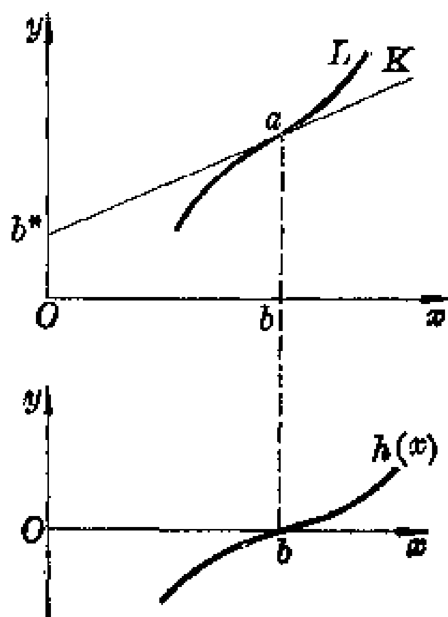


图 3

足条件

$$f''(b)=0. \tag{19}$$

我们证明这个论断。切线 $K$ 的方程能够记为

$$y=g(x)=f'(b)\cdot x+b^*. \tag{20}$$

这里，$f'(b)$是切线 $K$ 对横坐标轴倾角的正切，而 $b^*$ 是由条件

$$f(b)-g(b)=0 \tag{21}$$

确定的某一常数。这一条件表明如下事实：曲线 $L$ 在点 $a$ 的切线过点 $a$。研究函数

$$h(x)=f(x)-g(x). \tag{22}$$

这个函数满足两个条件

$$h(b)=0,\ h'(b)=0. \tag{23}$$

所以函数

$$y=h(x) \tag{24}$$

的图象与横坐标轴在点 $x=b$ 相切(见图 3)。切线 $K$ 把图形平面分为上半平面和下半平面。如果曲线 $L$ 在点 $a$ 从上半平面转到下半平面，那么函数(24)的图象从上往下穿过横坐标轴。这时，函数 $h(x)$递减。如果相反，曲线 $L$ 穿过切线，从下半平面转到上半平面，那么函数(24)的图象从下往上穿过横坐标轴。在这种情况下，函数 $h(x)$是递增的。如果第一种情况成立，即$h(x)$在点 $x=b$ 附近递减，那么它的导数在点 $b$ 附近不能是正的，即在点 $x=b$ 附近它满足条件

$$h'(x)\leqslant 0. \tag{25}$$

这样，函数 $h'(x)$在点 $x=b$ 有极大值，因而它的导数等于零，

当 $x=b$ 时， $(h'(x))'=h''(x)=0$,

即 $$h''(x)=0. \tag{26}$$

如果第二种情况成立，即函数 $h(x)$ 在点 $x=b$ 附近是递增，那么它的导数不能是负的，即在点 $x=b$ 附近有不等式

$$h'(x)\geqslant 0. \tag{27}$$

这样，函数 $h'(x)$ 在点 $x=b$ 有极小值，因此它的导数在这一点等于零，即

当 $x=b$ 时，$\qquad (h'(x))'=h''(x)=0.$

因此，在两种情况下我们都得到

$$h''(b)=0. \tag{28}$$

其次指出，对 $x$ 的线性函数 $g(x)$，等式

$$g''(x)=0 \tag{29}$$

成立。可见，由公式(28)和(29)我们得出

当 $x=b$ 时，$\qquad 0=(f(x)-g(x))''=f''(x)-0.$

因而，

$$f''(b)=0. \tag{30}$$

这样，在函数 $f(x)$ 图象的拐点上等式(19)成立被证明。但是应思考，不能得出这个等式对下述情况是充分条件，即以 $b$ 为横坐标的点是函数(18)的图象的拐点。

现在回到立方抛物线上。计算函数(2)的二阶导数。我们有

$$f''(x)=(x^3-px)''=6x. \tag{31}$$

我们已经确立了坐标原点是立方抛物线(2)的拐点。函数(2)的二阶导数表达式(31)，显示了坐标原点是立方抛物线唯一的拐点。因为(31)的二阶导数仅当 $x=0$ 时变为零。

下面，引出三个独立解决的问题。其中第一个问题是容易的，第二个和第三个问题是十分重要的数学问题，独立解决时需要花很大的气力。

**问题 1** 在给出方程(2)的坐标系的轴上，改变长度的比

例，即用新坐标 $x_1$ 和 $y_1$ 代替老坐标 $x$ 和 $y$，假定

$$x=kx_1, y=ly_1, \tag{32}$$

其中 $k$ 和 $l$ 是正实数。作(32)那样的坐标变换以后，方程(2)变为下列三种形式中的一种：

$$y_1=x_1^3-x_1, y_1=x_1^3, y_1=x_1^3+x_1. \tag{33}$$

**问题 2** 研究函数

$$y=f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3. \tag{34}$$

为此计算导数 $f'(x)$，借助导函数把 $x$ 的整个变化区间 $-\infty<x<+\infty$ 分为函数(34)的递增区间和递减区间。其次引入新的坐标 $x_1$ 和 $y_1$ 代替老的坐标 $x$ 和 $y$，新的坐标与老的坐标之间满足关系式

$$x=x_1+\alpha, y=y_1+\beta. \tag{35}$$

这样的坐标变换表示老坐标系的平行移动。作了这个变换，在新坐标系中曲线的方程具有形式(2)。作这个变换可以用两种方法。为了得出具有形式(2)的方程，直接选取值 $\alpha$ 和 $\beta$，或者求出函数(34)的图象 $L$ 的拐点，并用平行移动的方法把坐标原点转移到拐点这一点。求用老的系数表示在新坐标系中的系数 $p$ 的公式

$$p=p(a_1,a_2,a_3). \tag{36}$$

因为方程

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \tag{37}$$

当 $p(a_1,a_2,a_3)<0$ 时(见(36))只能有一个实根，当 $p=0$ 时或者只有一个实根，或者有一个三重的实根，当 $p>0$ 时能够有三个实根，阐明在什么条件下后一种情况中有三个实根。

**问题 3** 研究函数

$$f(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4 \tag{38}$$

和它的图象。对于这个问题，计算函数(38)的导数 $f'(x)$ 并利用问题 2 中得到的结果，在实质上说明函数(38)的图象性状的可能性，首先，指出可能是极大值或极小值的数，并说明这个数与函数(38)的系数 $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ 的关系。求出拐点并计算用系数 $b_1,b_2,b_3,b_4$ 表示的拐点的坐标。

14

# §5.

## 三角函数的导数与某些微分法则

这里，我们首先计算三角函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的导数，其中角 $x$ 不用度计算，而用弧度计算。在这个计算中将利用一个没有给出证明的事实，证明它是烦琐的和无趣的，而相信它是容易的。这个事实如下。

设$K$是某一圆周，而 $a$ 和 $b$ 是圆周上的两点，它们不在直径的端点上。圆周 $K$ 上较小的弧 $(ab)$ 的长度用 $s(ab)$ 表示，而弦 $ab$ 的长度用 $l(ab)$ 表示。显然，

$$s(ab)>l(ab). \tag{1}$$

当点 $a$ 和 $b$ 无限接近时，即当 $s(ab)\to 0$ 时，我们不加证明而接受比例式$\frac{l(ab)}{s(ab)}$趋近于1。这一点用公式表示可以记为

$$\lim_{s(ab)\to 0}\frac{l(ab)}{s(ab)}=1. \tag{2}$$

由这个没被证明的论断，我们已经完全严格地得出将要使用的另一个论断。为此，在坐标平面上选择以坐标原点 $O$ 为中心、半径为 1 的圆 $K$(图 4)。圆 $K$ 最右边的点用 $O'$ 标记，即圆 $K$ 和横坐标正半轴的交点。从点$O'$往上沿圆周截取弧长 $h<\frac{\pi}{2}$，它的端点用 $b$ 标记。同样，从点 $O'$ 往下截取弧长 $h$，它的端点用 $a$ 标记。这时，我们有

$$l(ab)=2\sin h,\ \ s(ab)=2h. \tag{3}$$

由关系式 (2) 得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\lim_{2h\to 0}\frac{2\sin h}{2h}=1.$$

因此，最后得到我们需要的关系式

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1. \qquad (4)$$

这个公式对正的 $h$ 得证，但它对负的 $h$ 也是正确的，因为当 $h$ 的符号改变时，$\sin h$ 的符号也改变。

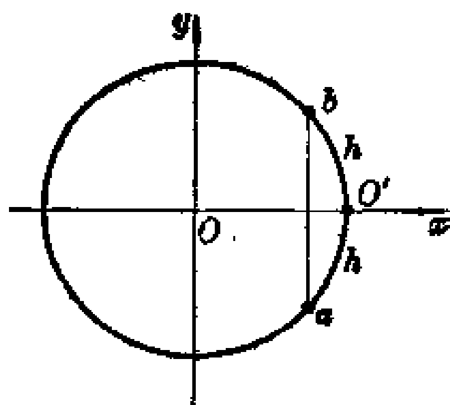



图 4

现在就完全严格地证明我们今后需要的结论

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0. \qquad (5)$$

证明这个关系式时，变换它较费力气，就是用较小的值 $\sin x$ 代替位于分母中的值 $h$。我们有

$$\frac{1-\cos h}{\sin h}=\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{\sin h(1+\cos h)}$$

$$=\frac{1-\cos^2 h}{\sin h(1+\cos h)}=\frac{\sin^2 h}{\sin h(1+\cos h)}$$

$$=\frac{\sin h}{1+\cos h}.$$

由此直接得出

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{\sin h}=0,$$

这个结论，象已经指出的那样，比我们证明的结论 (5) 要强一些。

当计算导数 $\sin' x$ 和 $\cos' x$ 时，我们利用导数的定义（见 §1(21)），但这时有某些符号的变换。就是，令 $\xi-x=h$，即 $\xi=x+h$。显然

当 $\xi\to x$ 时，有 $$h\to 0。$$

值 $h$ 称为自变量的改变量。利用这些符号，我们能够把§1 中导数的定义 (21) 改记为

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}。\tag{6}$$

值 $f(x+h)-f(x)$ 称为对应于自变量的改变量 $h$ 的函数的改变量。这样，为了计算导数 $\sin' x$ 我们必须计算值

$$\sin(x+h)-\sin x=\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x$$
$$=\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h。$$

因此，我们得到

$$\sin' x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos x}{h}=\cos x$$

(见(5)和(4))。于是，最后得到

$$\sin' x=\cos x。\tag{7}$$

计算导数 $\cos' x$ 也完全一样。为了求出它，我们需要计算差

$$\cos(x+h)-\cos x=\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x$$
$$=\cos x(\cos h-1)-\sin h\sin x。$$

我们得到

$$\cos' x=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\sin h\sin x}{h}=-\sin x$$

(见(5)和(4))。最后得

$$\cos' x=-\sin x。\tag{8}$$

**积和商的导数** 我们已经会求两个函数的和的导数（见§2(15)）。显然，学会求两个函数的积的导数和求两个函数的商的导数是很重要的。用 $u(x)$ 和 $v(x)$ 表示变量 $x$ 的两个函数，并求两个函数 $u(x)\,v(x)$ 和 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 的导数。

利用导数的定义（见§1 (21)）求出这些导数。为了求出积的导数我们需要先算出表达式

$$u(\xi)v(\xi)-u(x)v(x)$$
$$=u(\xi)v(\xi)-u(x)v(\xi)+u(x)v(\xi)-u(x)v(x)$$
$$=(u(\xi)-u(x))v(\xi)+u(x)(v(\xi)-v(x)).$$

因此得

$$(u(x)v(x))'=\lim_{\xi\to x}\frac{u(\xi)v(\xi)-u(x)v(x)}{\xi-x}$$
$$=\lim_{\xi\to x}\frac{(u(\xi)-u(x))v(\xi)}{\xi-x}$$
$$+\lim_{\xi\to x}\frac{u(x)(v(\xi)-v(x))}{\xi-x}$$
$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

这样，最后得出重要的公式

$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x). \tag{9}$$

求商$\frac{u(x)}{v(x)}$的导数也完全一样．为此我们首先必须计算表达式

$$\frac{u(\xi)}{v(\xi)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(\xi)v(x)-v(\xi)u(x)}{v(\xi)v(x)}$$
$$=\frac{u(\xi)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-v(\xi)u(x)}{v(\xi)v(x)}$$
$$=\frac{(u(\xi)-u(x))v(x)-(v(\xi)-v(x))u(x)}{v(\xi)v(x)}.$$

因此得

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\lim_{\xi\to x}\frac{\frac{u(\xi)}{v(\xi)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\xi-x}$$

$$= \lim_{\xi\to x} \frac{\frac{u(\xi)-u(x)}{\xi-x}v(x)}{v(\xi)\,v(x)} - \lim_{\xi\to x} \frac{\frac{v(\xi)-v(x)}{\xi-x}u(x)}{v(\xi)\,v(x)}$$

$$= \frac{u'(x)\,v(x)-v'(x)\,u(x)}{(v(x))^2}.$$

最后得出

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\,v(x)-v'(x)\,u(x)}{(v(x))^2}. \qquad (10)$$

**复合函数的导数**　从变量 $x$ 的函数 $\varphi(x)$和变量 $y$ 的函数 $\psi(y)$ 这两个给定的函数出发。令

$$y=\varphi(x). \qquad (11)$$

用这个 $y$ 的表达式代入函数 $\psi(y)$，则得函数

$$f(x)=\psi(y)=\psi(\varphi(x)). \qquad (12)$$

由两个函数 $\psi(y)$ 和 $\varphi(x)$ 组成的这个新函数 $f(x)$，称为复合函数。我们的任务是求出复合函数$f(x)$的导数 $f'(x)$。计算时将利用导数的定义（见 §1 (21)）。设

$$\eta=\varphi(\xi). \qquad (13)$$

那么　　当 $\xi\to x$ 时，有 $\eta\to y$。　　(14)

按照导数的定义

$$\psi'(y)=\lim_{\eta\to y}\frac{\psi(\eta)-\psi(y)}{\eta-y}. \qquad (15)$$

现在我们有

$$f'(x)=\lim_{\xi\to x}\frac{\psi(\eta)-\psi(y)}{\xi-x}$$

$$=\lim_{\xi\to x}\frac{\psi(\eta)-\psi(y)}{\eta-y}\cdot\frac{\varphi(\xi)-\varphi(x)}{\xi-x}.$$

因此有

$$f'(x)=\lim_{\eta\to y}\frac{\psi(\eta)-\psi(y)}{\eta-y}\cdot\lim_{\xi\to x}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(x)}{\xi-x}$$

$$=\psi'(y)\cdot\varphi'(x),$$

并且，在上式中应该用 $y=\varphi(x)$ 的值代替 $y$。

所以，最后得到

$$(\psi(\varphi(x)))'=\psi'(\varphi(x))\varphi'(x). \tag{16}$$

写出的这一公式用文字描述为：为了得到复合函数 $f(x)=\psi(\varphi(x))$ 的导数，我们首先应该计算出函数 $\psi(y)$ 对变量 $y$ 的导数，即求出函数 $\psi'(y)$，然后在得到的表达式中用 $\varphi(x)$ 的值代替 $y$。此后，我们应该把得到的表达式乘以 $\varphi'(x)$。

**$x$ 的有理次幂的导数** 利用得出的一般结果，计算函数

$$f(x)=x^r \tag{17}$$

的导数，其中 $r$ 是有理数。首先研究当 $r$ 是负整数的情况，

$$r=-n, \tag{18}$$

其中 $n$ 是正整数。在这种情况下，有

$$x^r=\frac{1}{x^n}. \tag{19}$$

为了计算 $x^r$ 的导数，应该利用法则 (10)。由这个法则和 §2 中的法则(13)，有

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\frac{1'\cdot x^n-1\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$=-nx^{-n-1}=rx^{r-1}$$

(见(18)和(19))。

因此，对于负整数 $r$ 得到

$$(x^r)'=rx^{r-1}. \tag{20}$$

现在设

$$r=\frac{p}{q}, \tag{21}$$

其中 $p$ 和 $q$ 是整数，并且 $q\neq 0$。利用法则(16)求函数 $x^r$ 的导数。这时，令

$$y=\varphi(x)=x^{\frac{p}{q}},\ \psi(y)=y^{q}. \tag{22}$$

那么有 $\psi(\varphi(x))=x^{p}$。由这个等式对$x$求导并对等式的左边应用法则(16)，得

$$qy^{q-1}\cdot\varphi'(x)=px^{p-1}.$$

用 $y=\varphi(x)$ 代入上式，得

$$qx^{\frac{p}{q}(q-1)}\cdot\varphi'(x)=px^{p-1}.$$

关于值 $\varphi'(x)$ 解这个方程，得

$$\varphi'(x)=\frac{p}{q}x^{p-1-\frac{p}{q}(q-1)}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}=rx^{r-1}.$$

这样，最后得到

$$(x^{r})'=rx^{r-1}. \tag{23}$$

于是，当 $r$ 为任意有理数时得出与 $r$ 为整数 $n$ 时同样的求导法则(见 §2(13))。

函数 $\operatorname{tg}x$ 的导数。求这个函数的导数可利用法则(10)。即置

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

那么由法则(10)，注意到(7)和(8)，我们有

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{\sin'x\cos x-\cos'x\sin x}{\cos^{2}x}$$

$$=\frac{\cos^{2}x+\sin^{2}x}{\cos^{2}x}=\frac{1}{\cos^{2}x}.$$

这样，最后得到

$$\operatorname{tg}'x=\frac{1}{\cos^{2}x}=1+\operatorname{tg}^{2}x. \tag{24}$$

# §6.

## 不定积分

当在数学中研究无论什么运算时，任何一种运算都产生它的逆运算问题。这样，除了加法运算以外要研究它的逆运算减法，除了乘法运算以外要研究它的逆运算除法，除了乘方运算以外要研究它的逆运算开方。当研究逆运算时产生两个基本问题：它的存在性和它的唯一性。比如，如果研究仅限于实数，那么求平方根并不总是可能的。从负数中不能求出平方根。恰恰是这样，求平方根不是单值的运算，因为当求正数的平方根时，我们得到它的两个值：正的和负的。现在，当我们导入了微分运算时，产生了它的逆运算问题。这个运算叫做*积分运算*。对积分运算我们应该解决两个基本的问题：积分运算的存在性问题和积分运算的唯一性问题。我们转到确切的数学定义。如果给定函数 $f(x)$，对同一个自变数的值给定函数 $h(x)$，$h(x)$ 和 $f(x)$ 满足条件

$$h'(x)=f(x), \tag{1}$$

那么函数 $h(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的*积分*或者叫做函数 $f(x)$ 的*原函数*。从给定的函数 $f(x)$ 转到满足方程(1)的函数 $h(x)$，是微分运算的逆运算，叫做*积分运算*。马上可以看出，积分运算不是单值的。即，如果函数 $h(x)$ 满足方程(1)，那么函数 $h(x)+C$ 也满足同一个方程，其中 $C$ 是常数。实质上，我们有

$$(h(x)+C)'=h'(x)+C'=h'(x)+0=f(x) \tag{2}$$

（见 §2 (14)）。但是，看来积分运算的整个非唯一性归结为常

数的添加。我们证明这一点。

首先证明，如果函数 $h(x)$ 满足方程

$$h'(x)=0, \tag{3}$$

那么函数 $h(x)$ 是常数

$$h(x)=C. \tag{4}$$

这个论断是正确的。然而，仅在函数 $h(x)$ 的自变量 $x$ 允许的值集是连通的情况下成立。连通性意味着除了函数 $h(x)$ 的自变量的任意两个允许值 $x_1$ 和 $x_2$ 以外，在 $x_1$ 和 $x_2$ 中间的任意数都是自变量的允许值。这一点无论什么时候都不应该忘记。现在证明，从关系式(3)可得出关系式(4)。设 $x_1$ 和 $x_2$ 是函数 $h(x)$ 自变量的两个任意值。因为函数 $h(x)$ 自变量值的集合是连通的，那么它在整个区间 $[x_1, x_2]$ 上有定义，因此由拉格朗日公式(见 §3(14)) 有

$$h(x_2)-h(x_1)=h'(\theta)(x_2-x_1). \tag{5}$$

因为 $h'(\theta)=0$ (见 (3))，那么从关系式 (5) 我们得出关系式 (4)。现在设 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 是两个函数，满足方程

$$h_1'(x)=f(x), \quad h_2'(x)=f(x), \tag{6}$$

所以函数 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 是同一个函数 $f(x)$ 的原函数。我们证明：关系式

$$h_2(x)=h_1(x)+C \tag{7}$$

成立，其中 $C$ 是常数。实际上，令 $h(x)=h_2(x)-h_1(x)$。这时有

$$\begin{aligned} h'(x)&=(h_2(x)-h_1(x))'=h_2'(x)-h_1'(x) \\ &=f(x)-f(x)=0, \end{aligned}$$

因而，函数 $h(x)$ 是常数。由此得出等式 (7) 成立。在证明中我们利用了函数 $h_1(x)$、$h_2(x)$ 并因此包括函数 $f(x)$ 是在连通集上给定的事实。方程 (1) 的解 $h(x)$ 记为

$$h(x)=\int f(x)dx. \tag{8}$$

公式(8)中的符号$\int$读作：积分。因为这个公式确定函数$h(x)$不是唯一的，而仅仅精确到相差一个常数，所以在公式右边描述的积分称为不定的。

在给定函数 $f(x)$ 的情况下求方程 (1) 的解 $h(x)$ 的问题，我们目前能够正着解某些具体的函数 $f(x)$，并且解法实际上归结为在 §2～§5 中已经给出的那些公式的基础上猜测解。这样，如果函数 $f(x)$ 是多项式

$$f(x)=C_0x^n+C_1x^{n-1}+\cdots+C_{n-1}x+C_n, \tag{9}$$

那么，利用 §2 中的公式(18)，我们能够求出函数$h(x)$。即，有

$$h(x)=\int(C_0x^n+C_1x^{n-1}+\cdots+C_{n-1}x+C_n)dx$$

$$=\frac{C_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{C_1}{n}x^n+\cdots+\frac{C_{n-1}}{2}x^2+C_nx+C, \tag{10}$$

其中 $C$ 是任意常数。

同样，由 §5 的公式 (8) 和 (7) 得

$$\int\sin xdx=-\cos x+C,\quad \int\cos xdx=\sin x+C, \tag{11}$$

其中 $C$ 是任意常数。

由 §5 的公式 (24) 得

$$\int\frac{dx}{\cos^2x}=\mathrm{tg}x+C. \tag{12}$$

存在许多不同的求不定积分的方法。但是所有这些方法实质上都归结为一种推测。这里我们不作介绍。仅给出一个普遍的法则。如果对函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_m(x)$, 已知它们的原函数为 $h_1(x)$, $h_2(x)$, …, $h_m(x)$, 并且满足关系式

$h_i'(x)=f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$，那么对函数

$$f(x)=C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_mf_m(x), \qquad (13)$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 是常数，我们能够写出不定积分

$$\int f(x)dx=C_1h_1(x)+C_2h_2(x)+\cdots+C_mh_m(x)+C, \quad (14)$$

其中 $C$ 是任意常数。

我们给出所得结果在力学问题中简单而又重要的应用。

研究质点的直线运动，对这个运动的数学描述使用我们的横坐标轴这条直线，而质点在时刻 $t$ 的位置我们用 $x(t)$ 标记，$x(t)$ 所指的既是质点本身，又是它的横坐标。时间$t$的函数 $x(t)$ 完全描述依赖于时间的质点运动。如果 $t$ 和 $\tau$ 是两个时刻，并且 $t<\tau$，那么在时间间隔 $\tau-t$ 内质点通过的路程为 $x(\tau)-x(t)$，而在时间区间 $[t, \tau]$ 上质点运动的平均速度 $x(t)$ 自然由公式

$$\frac{x(\tau)-x(t)}{\tau-t} \qquad (15)$$

确定。值 $\tau$ 越是趋近于值 $t$，分式(15)所确定的在时刻 $t$ 的运动速度越是准确。因此，这个速度 $v(t)$ 由公式

$$v(t)=\lim_{\tau\to t}\frac{x(\tau)-x(t)}{\tau-t} \qquad (16)$$

确定。这个等式的右边正好是函数 $x(t)$ 对 $t$ 的导数，所以质点 $x(t)$ 在时刻 $t$ 的运动速度 $v(t)$ 就由公式

$$v(t)=x'(t) \qquad (17)$$

确定。如果质点运动的速度 $v(t)$ 不依赖于 $t$，即质点以固定的速度 $v(t)=v$ 运动，其中 $v$ 是不变的量，那么质点 $x(t)$的位置应该从方程

$$x'(t)=v \qquad (18)$$

中求得。根据公式(10)，这个方程的解记为

$$x = vt + C, \tag{19}$$

其中 $C$ 是常量。为了求出这个常量，用 $x_0$ 表示质点在时刻 $t=0$ 的位置。把 $x_0 = x(0)$ 代入关系式(19)，得

$$x(0) = x_0 = C. \tag{20}$$

因而方程 (18) 的解就记为

$$x(t) = x_0 + vt, \tag{21}$$

其中 $x_0$ 是质点在开始时刻 $t=0$ 时的位置，而 $v$ 是质点运动的固定的速度。方程 (21) 描述具有固定速度 $v$ 的质点的运动。

如果质点运动的速度是不固定的，那么除了速度以外，还要研究另外一个重要的量——加速度，加速度描述速度的变化。类似于我们定义平均速度那样，在从 $t$ 到 $\tau$ 的时间区间上定义平均加速度。它由公式

$$\frac{v(\tau) - v(t)}{\tau - t} \tag{22}$$

确定。时刻 $\tau$ 越是趋近于时刻 $t$，公式(22)越是准确地给出在时刻 $t$ 质点运动的加速度。因此，在时刻 $t$ 质点的加速度的精确值 $u(t)$ 由公式

$$u(t) = \lim_{\tau \to t} \frac{v(\tau) - v(t)}{\tau - t} \tag{23}$$

确定。位于这个等式右端的值正是函数 $v(t)$ 对自变数 $t$ 的导数 $v'(t)$，所以有

$$u(t) = v'(t). \tag{24}$$

注意公式 (17)，我们可以把等式 (24) 变为以下形式

$$u(t) = x''(t) \tag{25}$$

(见 §4(1))。这样，在时刻 $t$ 质点 $x(t)$ 运动的速度是导数 $x'(t)$，而在时刻 $t$ 质点 $x(t)$ 运动的加速度是二阶导数 $x''(t)$。匀加速运动，即加速度 $u(t)$ 是固定值

$$u(t)=u \tag{26}$$

的运动具有很大的价值，其中 $u$ 是固定值。在这种情况下，质点运动的速度 $v(t)$ 应该从方程

$$v'(t)=u \tag{27}$$

得出。

由公式 (10)，这个方程的解记为

$$v(t)=ut+C, \tag{28}$$

其中 $C$ 是常数。为了求出这个常数值，用 $v_0$ 表示质点 $x(t)$在时刻 $t=0$ 时运动的速度。把 $t=0$ 代入方程(28)，得 $v(0)=v_0=C$。这样，方程 (27) 的解 $v(t)$ 记为

$$v(t)=v_0+ut.$$

用量 $x'(t)$ 代替 $v(t)$，得出函数 $x(t)$ 的方程

$$x'(t)=v_0+ut. \tag{29}$$

根据早些时候得到的结果(见(10))，函数

$$x(t)=v_0t+\frac{u}{2}t^2+C \tag{30}$$

是这个方程的解，其中 $C$ 是常量。为了求出这个常数值 $C$，用 $x_0$ 表示质点 $x(t)$ 在时刻 $t=0$ 时的位置。把 $t=0$ 代入方程(30)。这时我们得出 $x(0)=x_0=C$。

由此可见，匀加速运动用方程

$$x(t)=x_0+v_0t+\frac{ut^2}{2} \tag{31}$$

来描述。

# §7.

## 定 积 分

积分法在数学中不仅作为微分法的逆运算而产生，而且在解许多其它的问题中，特别是在几何中计算面积时同样会产生。平面上有界曲线围成的图形面积的计算为我们导出积分法。这时，积分不再是不确定的，因为图形的面积有完全确定的值。这里，我们研究最简单的面积计算问题，导出定积分。

由给定的函数

$$y=f(x) \tag{1}$$

出发，在普通的笛卡儿直角坐标系中，作出这个函数的图象 $L$。我们暂时假设整个图象 $L$ 位于横坐标轴的上面。设 $u$, $v$ 是函数 $f(x)$ 的自变量 $x$ 的两个任意的值，并且 $u<v$。图象 $L$ 上横坐标为 $u$ 和 $v$ 的点，我们分别记为 $a$、$b$。现在自然地分出有限的平面区域：它的下界是横坐标轴上的线段 $[u, v]$，左界是纵坐标线 $ua$，右界是纵坐标线 $vb$，上界是区间 $[a, b]$ 上的图象 $L$。这个平面区域我们用 $Q(u, v)$ 标记。正确的思想和应用的需要告诉我们，平面曲域 $Q(u,v)$ 具有确定的面积。这个面积我们记为 $h(u, v)$。现在，选取函数 $f(x)$ 的两个自变量的值 $x_0$ 和 $x$，并假定

$$h(x_0, x)=h(x). \tag{2}$$

相应的面积用 $h(x)$ 表示，我们对这个面积本身强调指出，作为变量 $x$ 的函数来研究它。现在我们计算这样定义的函数 $h(x)$ 的导数 $h'(x)$。为此，选取函数(1)的某一趋近于 $x$ 的自

变量的值 $\xi$。为明确起见，我们认为 $\xi>x$。为了计算导数 $h(x)$，首先应该计算差 $h(\xi)-h(x)$，即图形 $Q(x_0, \xi)$ 和 $Q(x_0, x)$ 的面积的差。这个差等于图形 $Q(x, \xi)$ 的面积。我们有

$$h(\xi)-h(x)=h(x,\xi)。\tag{3}$$

我们不精确地计算图形 $Q(x, \xi)$ 的面积 $h(x,\xi)$，而是仅仅给出它的估计。为此引入新的符号。对于函数 $f(x)$的自变量的两个任意的值 $u, v$，我们用 $\mu(u, v)$ 标记函数 $f(x)$ 在区间$[u, v]$上的极小值，而用 $\nu(u, v)$ 标记函数 $f(x)$ 在同一个区间 $[u, v]$ 上的极大值。以线段 $[u, v]$ 为底、以 $\mu(u, v)$ 为高的长方形记为 $M(u, v)$，而以 $[u, v]$ 为底和 $\nu(u, v)$ 为高的长方形记为 $N(u, v)$。应用我们的符号，当 $u=x$，而 $v=\xi$ 时，我们看出，长方形 $M(x, \xi)$ 含于图形 $Q(x, \xi)$ 之中，而图形 $Q(x, \xi)$ 本身又含于长方形 $N(x, \xi)$ 之中。因为长方形 $M(x, \xi)$ 和 $N(x, \xi)$ 的面积分别等于

$$(\xi-x)\,\mu(x,\xi),\quad (\xi-x)\,\nu(x,\xi),\tag{4}$$

那么我们得出下列的双重不等式：

$$(\xi-x)\mu(x, \xi)\leqslant h(x, \xi)\leqslant(\xi-x)\nu(x, \xi)\tag{5}$$

或者另一种形式

$$(\xi-x)\mu(x,\xi)\leqslant h(\xi)-h(x)\leqslant(\xi-x)\nu(x,\xi)。\tag{6}$$

显然，当 $\xi\to x$ 时，我们有

$$\mu(x,\xi)\to f(x),\quad \nu(x,\xi)\to f(x)。\tag{7}$$

这样，双重不等式(6)除以正值 $(\xi-x)$，并当 $\xi\to x$ 时取极限，得到

$$f(x)\leqslant\lim_{\xi\to x}\frac{h(\xi)-h(x)}{\xi-x}\leqslant f(x)。\tag{8}$$

因为，根据定义，

$$h'(x)=\lim_{\xi\to x}\frac{h(\xi)-h(x)}{\xi-x},$$

则由公式（8）得出

$$h'(x)=f(x)。\tag{9}$$

所以我们找到了函数 $h(x)$ 的导数，并确信 $h(x)$ 就是函数 $f(x)$ 的原函数。应该再指出函数 $h(x)$ 的一个性质。当 $x=x_0$时，平面区域$Q(x_0,x)$变为线段，因此具有等于零的面积。这样，

$$h(x_0)=0。\tag{10}$$

直到现在所得到的一切命题，都是在 $x_0\leqslant x$和区间 $[x_0,x]$ 上函数 $f(x)$ 的图象 $L$ 完全位于横坐标轴的上面成立的。这些命题必须是对满足条件(9)和(10)的函数 $h(x)$ 写下和定义的。

如果在区间 $[x_0,x]$ 上的函数 $f(x)$ 的图象，部分地处在横坐标轴的上面和部分地处在横坐标轴的下面，则我们把图象分为两部分：位于横坐标轴上面的$L_+$和位于横坐标轴下面的$L_-$。曲线 $L_+$ 和 $L_-$ 中的每一部分都可能由某些块组成。曲线$L_+$和横坐标轴之间包含的面积用 $h_+(x)$表示，而横坐标轴和曲线 $L_-$ 之间包含的面积用 $h_-(x)$ 表示。维持 $x_0<x$ 的命题，我们现在假定

$$h(x)=h_+(x)-h_-(x)。\tag{11}$$

如果现在 $x_0>x$，则面积 $h_+(x)$ 和 $h_-(x)$ 与在 $x_0<x$ 的情况下同样确定，但是函数 $h(x)$ 由公式

$$h(x)=-(h_+(x)-h_-(x))\tag{12}$$

确定。

面积在本质上是正值。由公式(11)和(12)确定了面积，因而我们代数地考察所列入的正负符号与位置有关的面积。

只要细心可以没有任何困难地证明，在函数 $h(x)$的新的定义下，它的性质 (9) 和 (10) 将保持不变。这样，对任意的函数 $f(x)$，可求出它满足附加条件 (10) 的原函数 $h(x)$。

函数 $f(x)$ 的原函数 $h(x)$ 的这种构造方法，即使我们相信函数 $h(x)$ 是存在的，因为图形面积存在的想法是正确的，但是甚至在计算机的帮助下它也不能给我们计算这个面积的可能性。函数 $h(x)$ 的计算方法将稍迟些给出，而此刻我们证明，已经达到的结果给我们另一些成果。当我们能够推测函数 $f(x)$ 的原函数 $h_1(x)$ 时，在这种情况下，它能够计算平面区域 $Q(x_0, x)$ 的面积 $h(x)$。于是，假定我们求得了满足条件

$$h_1'(x) = f(x) \tag{13}$$

的函数 $h_1(x)$，用函数 $h(x)$ 代替 §6 公式(7)中的函数 $h_2(x)$，得到等式

$$h(x) = h_1(x) + C, \tag{14}$$

其中 $C$ 是常数。为此求这个常数，用值 $x_0$ 代替该等式中的 $x$。由公式(10)我们得到

$$0 = h(x_0) = h_1(x_0) + C.$$

由此得出 $C = -h_1(x_0)$，于是

$$h(x) = h_1(x) - h_1(x_0). \tag{15}$$

这个公式是重要的结果。它表示用函数 $f(x)$ 的任意原函数 $h_1(x)$ 表示图形 $Q(x_0, x)$ 的面积 $h(x)$。函数 $h(x)$本身叫做函数 $f(x)$ 的定积分，记为

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt. \tag{16}$$

这里$x_0$ 叫做积分下限，$x$ 叫做积分上限，而 $t$ 叫做积分变量。函数 $h(x)$ 取决于给定的函数 $f(x)$ 和积分限 $x_0$ 及 $x$，但所有

这一切不依赖于积分变量，更确切地说，不依赖于积分变量的符号，甚至它可以用任意一个字母标记。例如，我们可以记为

$$h(x)=\int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau.$$

**定积分作为有穷和序列的极限** 现在我们转到平面区域 $Q(x_0, x)$ 的面积 $h(x)$ 的近似计算方法。这里我们重申：$x_0<x$ 以及区间 $[x_0, x]$ 上的函数 $f(x)$ 的图象位于横坐标轴的上面。用点

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=x \tag{17}$$

分割区间 $[x_0, x]$。如果每一个子区间的长度都比 $\delta$ 小，即如果满足条件

$$x_i-x_{i-1}<\delta \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{18}$$

我们就说，区间 $[x_0, x]$ 的分割 (17) 具有*细度* $\delta$。对区间 $[u, v]$ 使用原来引进的符号，现在把它们应用到区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上，构成两个和

$$M=(x_1-x_0)\mu(x_0,x_1)+(x_2-x_1)\mu(x_1,x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})\mu(x_{n-1},x_n), \tag{19}$$

$$N=(x_1-x_0)\nu(x_0,x_1)+(x_2-x_1)\nu(x_1,x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})\nu(x_{n-1},x_n). \tag{20}$$

和 (19) 是所有的长方形

$$M(x_{i-1},x_i)\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{21}$$

的面积的和。和 (20) 则是所有的长方形

$$N(x_{i-1},x_i)\,(i=1,2,\cdots,n) \tag{22}$$

的面积的和。把所有的长方形 (21) 连起来位于平面区域 $Q(x_0, x)$ 的内部。把所有的长方形 (22) 连起来 $Q(x_0, x)$ 本身包含在内部。这样，我们有双重不等式

$$M\leqslant h(x)\leqslant N. \tag{23}$$

$M$和$N$的值取决于点列(17)，即取决于区间$[x_0, x]$分割的方法。比较简单的，但是十分冗长地证明，当分割(17)无限变小时，即当$\delta\to0$时，$N-M$的值也趋近于零。这就证明$M$和$N$的值就是面积$h(x)$的近似值。当计算$M$和$N$的值时，我们应该求出函数$f(x)$在所有的部分区间上的极大值和极小值，这乃是不大方便的一个事实。利用以下的方法可以简化这一点。在每一个区间$[x_{i-1}, x_i]$上，选取任意一点$\xi_i$，作和

$$P=(x_1-x_0)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\cdots +(x_n-x_{n-1})f(\xi_n). \tag{24}$$

因为有明显的不等式

$$\mu(x_{i-1}, x_i)\leqslant f(\xi_i)\leqslant \nu(x_{i-1}, x_i) \tag{25}$$

成立，那么我们有不等式

$$M\leqslant P\leqslant N. \tag{26}$$

因为$M$和$N$的值当$\delta\to0$时无限接近，那么，$h(x)$和$P$的值当分割(17)无限变小时也无限接近。这样，利用和(24)可以近似计算面积$h(x)$。这就是区域$Q(x_0, x)$的面积的计算方法。它也能作为面积概念的逻辑定义。

# § 8.

## 收敛公设

现在，我们给出利用 §7 公式(16)计算面积的一个很简单的例子，引入与这些研究有关的极限存在的重要检验法。由公式

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \tag{1}$$

给出的函数，只研究正 $x$ 值的情况。由 §5 的公式(23)知函数 $-x^{-1}$ 是函数 $x^{-2}$ 的原函数。实际上， $-(x^{-1})'=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$。这样，由 §7 公式 (16)，以函数 (1) 给定的区域 $Q(x_0, x)$ 的面积由公式

$$h(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{t^2}dt=-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}$$

确定。因此，

$$h(x)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}. \tag{2}$$

因为 $x>x_0$，则 $h(x)>0$。这里，重要的是提出一个很有趣的情况。如果 $x$ 无限增大，那么关系式 (2) 的右边趋近于极限 $\frac{1}{x_0}$。这一点应该理解如下，虽然包含在横坐标轴和我们的曲线之间的平面区域是无限延伸的，在纵坐标线 $x_0a_0$、横坐标轴和曲线

$$y=\frac{1}{x^2}$$

之间仍具有有限的面积。这一点用公式的形式记为

$$\int_{x_0}^{\infty}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{x_0}. \tag{3}$$

这些奇特的现象与另一些起着非常重要作用的现象联系着，我们立刻讲述这一点。

我们认为 $k$ 是自然数并组成整数数列

$$x_0=k,\quad x_1=k+1,\cdots,\quad x_i=k+i,\cdots,\quad x_n=k+n=x. \tag{4}$$

这个整数数列把积分区间 $[x_0,\ x]$ 分为长度为 1 的区间。对区间 $[x_0, x]$ 的这个分割，我们对函数 (1) 构成在长度为 1 的区间上的和 $M$（见 §7(19)）。这时，我们应该注意，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上的极小值在区间的右端点上达到并等于 $\frac{1}{x_i^2}$，即

$$\mu(x_{i-1},\ x_i)=\frac{1}{x_i^2}=\frac{1}{(k+i)^2}. \tag{5}$$

在我们的情况下，数 $M$ 依赖于还没有确定的自然数 $k$ 和 $n$，所以我们用 $M(k,\ n)$ 标记它。由 §7 公式 (19) 我们得到它的表达式

$$M=M(k,n)=\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(k+n)^2}. \tag{6}$$

由 §7 双重不等式 (23) 的第一部分我们得到在上述情况下

$$M(k,n)=\int_k^{k+n}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}. \tag{7}$$

现在，令

$$k=1,\quad p=n+1,\quad s_p=1+M(1,p). \tag{8}$$

这时，我们得到下列 $s_p$ 的表达式：

$$s_p=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{p^2}\leqslant 1+1-\frac{1}{p}=2-\frac{1}{p}. \tag{9}$$

由此得出，$s_p$ 的值总是满足不等式

$$s_p\leqslant 2. \tag{10}$$

显然，由公式 (9) 知，$s_p$ 的值随着 $p$ 的增加而增加，但是在这个增加过程中是有限的。任何时候都比 2 小。对我们来说正确的含义是当 $p$ 无限的增加时，$s_p$ 的值是有限的，应该趋近于某一个确定的数 $s$。这个论断我们可以记为

$$\lim_{p\to\infty} s_p = s. \tag{11}$$

**收敛公设**　我们不加证明地应用下列论断。

设有自然数 $p$ 的某一函数 $\sigma(p)$，满足以下两个条件：$\sigma(p)$ 随着 $p$ 的增大而增大，即满足条件

$$\sigma(p+1) > \sigma(p) \quad (p=1,2,\cdots) \tag{12}$$

以及 $\sigma(p)$ 对所有的 $p$ 值是有界的，即满足条件

$$\sigma(p) < C, \tag{13}$$

其中 $C$ 是不依赖于 $p$ 的常数。当 $p$ 无限增加时，$\sigma(p)$ 的值则无限趋近于某一个数 $\sigma$。这个结论记为

$$\lim_{p\to\infty}\sigma(p) = \sigma. \tag{14}$$

现在，我们能够把关系式(9)变成下列形式。研究无穷和

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{i^2}+\cdots. \tag{15}$$

因为这个级数各项的有限和 $s_p$ (见 (9)) 满足我们假设的条件，则认为无穷和 (15) 存在并由公式

$$s = \lim_{p\to\infty} s_p \tag{16}$$

给出。这说明无穷级数 (15) 收敛，并以值 $s$ 作为自己的和。

如果

$$p < q \tag{17}$$

是两个自然数，则由公式 (6)、(7) 和 (9) 得出

$$s_q = s_p + M(p, q-p), \tag{18}$$

并且

$$M(p, q-p) \leqslant \frac{1}{p}. \tag{19}$$

这样，我们有

$$s_q - s_p \leqslant \frac{1}{p}. \tag{20}$$

当 $q \to \infty$ 时，这个关系式转化为极限，得

$$s - s_p \leqslant \frac{1}{p}. \tag{21}$$

由此我们看出，值 $s$ 决定了精确到 $\frac{1}{p}$ 的值 $s_p$，因此，作为量 $s$ 的近似值研究值 $s_p$ 时，我们知道在这种近似下所允许的误差值。

在代数中，已经研究过无穷级数的和，即无穷几何级数的和

$$s = w + wv + wv^2 + \cdots + wv^i + \cdots.$$

在 $|v| < 1$ 的情况下，这个级数有和，等于

$$\frac{w}{1-v}. \tag{22}$$

这样，我们已经接触到无穷级数的求和，并且有了计算无穷级数的和(22)的可能性。

无穷级数(15)也有和，但我们不能用公式的形式表示它，对于几何级数可以做到这一点。我们仅能确信，由它的开始若干项组成的有限和 $s_p$ 是这个级数的和 $s$ 的近似值，并且知道这个近似值的精确度(见(21))。既然能够求出数 $s$ 的任意近似值，则应该认为数 $s$ 对我们是已知的。当研究数 $\pi$ 时，我们已经碰到过这样的现象。对它能够计算到任意精确度，但不能用任何代数公式给出数 $\pi$。

由等式 (16) 给出的数 $s$ 的情况正是这样。数 $s_p$ 是它的近似值。

## §9.

## 牛顿二项式与几何级数的和

这里要证明本节标题中提到的代数公式，这些公式在§10中对我们是需要的。

**牛顿二项式** 为了描述并证明称为牛顿二项式的牛顿的这个公式，首先必须提醒的是自然数 $n$ 的函数 $n!$。这个函数由公式

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n \qquad (1)$$

确定。因此 $n!$（读作：$n$ 的阶乘）是从1开始到 $n$ 的所有连续自然数的乘积。我们有

$$1!=1,\ 2!=1\cdot 2=2,\ 3!=1\cdot 2\cdot 3=6,$$
$$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24.$$

为方便起见令

$$0!=1. \qquad (2)$$

这里所指的牛顿公式记为以下形式：

$$(u+v)^n=\sum_{\substack{i,j\\ i+j=n}}\frac{n!}{i!j!}u^iv^j. \qquad (3)$$

这里右边是形如

$$\frac{n!}{i!j!}u^iv^j \qquad (4)$$

的所有项的和，其中 $i+j=n$，并且 $i$ 和 $j$ 是非负整数。我们归纳地证明这个公式。即首先确认对 $n=1$ 它是正确的，然后证明，如果当幂指数等于 $n$ 时它是正确的，则当指数等于 $n+1$ 时它也是正确的。

对 $n=1$ 我们有

$$(u+v)^1=u+v=\frac{u}{1!0!}+\frac{v}{0!1!}. \tag{5}$$

因此，对 $n=1$ 公式(3)成立。

为了实施归纳法，使等式(3)乘以 $u+v$，则得左边为 $(u+v)^{n+1}$。我们也得到右边包含因子 $u^pv^q$ 的项，其中 $p+q=n+1$。由被加项(4)乘以 $(u+v)$ 后，得到在下列情况下包含因子 $u^pv^q$ 的被加项，如果

$$i=p-1,\ j=q \text{ 或者 } i=p,\ j=q-1.$$

在第一种情况中，得到在(4)的各项乘以 $u$ 的结果中包含的项 $u^pv^q$，而在第二种情况中，得到当(4)的各项乘以 $v$ 时的结果中所包含的项。这样，在等式(3)右边的和乘以 $(u+v)$ 的结果中，我们得到具有系数

$$\frac{n!}{(p-1)!q!}+\frac{n!}{p!(q-1)!} \tag{6}$$

的项。这个和的第一个被加项的分子和分母乘以 $p$，这个和的第二个被加项的分子和分母乘以 $q$，把和式(6)变为

$$\frac{n!p}{p!q!}+\frac{n!q}{p!q!}=\frac{n!(p+q)}{p!q!}=\frac{(n+1)!}{p!q!}. \tag{7}$$

最后得到

$$(u+v)^{n+1}=\sum_{\substack{p,q\\ p+q=n+1}}\frac{(n+1)!}{p!q!}u^pv^q. \tag{8}$$

于是，通过归纳法公式(3)得证。

公式(3)中的系数

$$\frac{n!}{i!j!} \tag{9}$$

通常记为几个另外的形式。对此，令 $j=k$, $i=n-k$ 并对分数(9)约去 $(n-k)!$。事实上，我们有

$$\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)\cdots(n-k+1). \tag{10}$$

因此得出

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \tag{11}$$

把公式(3)改写成

$$(u+v)^n=u^n+\frac{n}{1!}u^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{n-k}v^k+\cdots+v^n. \tag{12}$$

我们又重新导出了一个代数中著名的公式。

**几何级数的和** 令

$$g_m=w+w\cdot v+w\cdot v^2+\cdots+w\cdot v^m. \tag{13}$$

对这个等式的右边乘以并除以$(1-v)$，利用§2中的公式(9)并令其中的$u=1$。则得

$$g_m=w\frac{1-v^{m+1}}{1-v}. \tag{14}$$

今后，我们将仅在

$$0<v<1,\quad w>0$$

的情况下使用这个公式。在这种情况下，由它得出

$$g_m<\frac{w}{1-v}. \tag{15}$$

# §10.

## 函 数 $e^x$

这里我们首先非常学究式的和严格的定义函数 $e^x$，其中 $x$ 是变量，可以取任意实数值，而 $e$ 是数学中著名和重要的数

$$e = 2.71828\cdots。$$

我们从研究函数

$$\omega_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{1}$$

开始探讨，其中 $n$ 是自然数。用这个关系式确定的函数 $\omega_n(x)$ 是 $x$ 的 $n$ 次多项式。首先我们证明，当 $n\to\infty$ 时，对于每一个确定的 $x$，$\omega_n(x)$ 的值趋近于某一个确定的极限，这个确定的极限用 $\exp(x)$ 表示，用公式形式记为：

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n(x) = \exp(x)。 \tag{2}$$

在由这个关系式确定的函数 $\exp(x)$ 仔细研究的结果中，我们得出结论

$$\exp(x) = e^x。 \tag{3}$$

**函数 $\omega_n(x)$ 的研究**，令§9公式(12)中的 $u = 1$，$v = \frac{x}{n}$，把该公式应用于等式(1)的右边。则得

$$\omega_n(x) = 1 + \frac{n}{1!}\frac{x}{n} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{x^k}{n^k} + \cdots。 \tag{4}$$

在得到的公式中变换 $x^k$ 的系数。我们有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}。 \tag{5}$$

令

$$\gamma_n(k) = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right), \tag{6}$$

我们可以把公式(4)改记为

$$\omega_n(x)=1+\gamma_n(1)\frac{x}{1!}+\cdots+\gamma_n(k)\frac{x^k}{k!}+\cdots. \tag{7}$$

值 $\gamma_n(k)$具有下列性质：

$$\gamma_n(1)=1. \tag{8}$$

当 $1<k\leqslant n$时，　　$0<\gamma_n(k)<\gamma_{n+1}(k)<1$.　　(9)

当 $k>n$时，　　$\gamma_n(k)=0$.

由公式(7)和不等式(9)得出

当 $x>0$时，有　　$\omega_n(x)<\omega_{n+1}(x)$.　　(10)

现在我们确定 $x$，不一定是正数，我们选取大到这样程度的自然数 $p$，使$|x|<p+1$，或者同样的使

$$\frac{|x|}{p+1}<1. \tag{11}$$

那么当 $k>p$ 时，有

$$\frac{\gamma_n(k)}{k!}|x|^k\leqslant\frac{|x|^k}{k!}=\frac{|x|^p}{p!}\cdot\frac{|x|}{p+1}\cdot\frac{|x|}{p+2}\cdot\cdots\cdot\frac{|x|}{k}$$
$$\leqslant\frac{|x|^p}{p!}\ \frac{|x|^{k-p}}{(p+1)^{k-p}}. \tag{12}$$

把和(7)整理为两项

$$\omega_n(x)=s_n(p,x)+r_n(p,x), \tag{13}$$

其中

$$s_n(p,x)=1+\gamma_n(1)\frac{x}{1!}+\cdots+\gamma_n(i)\frac{x^i}{i!}+\cdots+\gamma_n(p)\frac{x^p}{p!}, \tag{14}$$

$$r_n(p,x)=\gamma_n(p+1)\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}+\cdots+\gamma_n(k)\frac{k^k}{k!}+\cdots; \tag{15}$$

这里$i\leqslant p$，$k>p$.

由公式(12)得不等式

$$|r_n(p, x)| \leqslant \frac{|x|^p}{p!}\left[\frac{|x|}{p+1} + \frac{|x|^2}{(p+1)^2} + \cdots + \frac{|x|^{h-p}}{(p+1)^{h-p}} + \cdots\right]$$

$$< \frac{|x|^p}{p!} \cdot \frac{\frac{|x|}{p+1}}{1 - \frac{|x|}{p+1}} = \frac{|x|^p}{p!} \cdot \frac{|x|}{p+1-|x|}$$

(见§9 (15)和本节(11))。最后得到

当 $|x|<p+1$ 时，$|r_n(p, x)| < \dfrac{|x|^p}{p!} \cdot \dfrac{|x|}{p+1-|x|}$。 (16)

由此可以看出，当 $n$ 无限增大时值 $|r_n(p, x)|$ 仍然是有界的，于是，有不等式

$$\omega_n(x) < c(x), \qquad (17)$$

其中 $c(x)$ 依赖于 $x$，但不依赖于 $n$。这样，当 $x>0$ 时，由不等式(10)和(17)，$\omega_n(x)$ 的值随着 $n$ 的无限增大而增大，并仍然是有界的，因此它的极限存在(见§8)，所以我们能够写

当 $x>0$ 时，有 $\quad \exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(x)$。

$|x|\leqslant 1$ **的情况** 在这种情况下我们可认为 $p=1$，因为当 $|x|\leqslant 1$ 时不等式(11)在 $p=1$ 的条件下成立。那么公式(13)变为

$$\omega_n(x) = 1 + x + r_n(1, x),$$

其中 $\quad |r_n(1, x)| < |x| \cdot \dfrac{|x|}{2-|x|} \leqslant |x|^2$。

因此，当 $|x|\leqslant 1$ 时，最后有

$\omega_n(x) = 1 + x + r_n(1, x)$， 其中 $|r_n(1, x)| < x^2$。 (18)

现在设

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots \qquad (19)$$

是某一收敛于零的数列。我们研究 $\omega_n(\xi_n)$ 的值。因为当 $n$ 足够大时 $|\xi_n|<1$，那么当 $n$ 足够大时对 $\omega_n(\xi_n)$ 的值公式(18)

成立，即

$$\omega_n(\xi_n)=1+\xi_n+r_n(1,\xi_n)，\ 其中\ |r_n(1,\xi_n)|<\xi_n^2。$$

由此，得出最终的结论：

$$如果\ \lim_{n\to\infty}\xi_n=0，\ 那么\ \lim_{n\to\infty}\omega_n(\xi_n)=1。\tag{20}$$

现在我们提一下函数 $\omega_n(x)$ 的自变量 $x$ 是负的情况。为此研究函数

$$\omega_n(-x),\tag{21}$$

$x$ 是正的。构成函数的积 $\omega_n(-x)\omega_n(x)$。我们有

$$\omega_n(-x)\omega_n(x)=\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n=\omega_n(\xi_n),\tag{22}$$

其中
$$\xi_n=-\frac{x^2}{n}。$$

因为
$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=0,$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\omega_n(\xi_n)=1\tag{23}$$

（见(20)）。因为由公式(22)有

$$\omega_n(-x)=\frac{\omega_n(\xi_n)}{\omega_n(x)},$$

并且当 $n\to\infty$ 时上式右边的分子和分母有确定的极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n(-x)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(\xi_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(x)}=\frac{1}{\exp(x)}。$$

这样，我们证明了，当 $x$ 是正数时函数 $\omega_n(-x)$ 趋近于确定的极限，所以能够认为

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n(-x)=\exp(-x),$$

并且
$$\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}。\tag{24}$$

这里我们同时证明了函数 $\exp(x)$ 的重要性质，即

$$\exp(-x)\exp(x)=1,\tag{25}$$

其中 $x>0$。符号 $-x$ 改变为 $x$，得到公式

$$\exp(x)\exp(-x)=1, \tag{26}$$

其中 $x$ 已经是负的。此外，当 $x=0$，$\omega_n(x)=1$ 时，根据定义，我们指出

$$\exp(0)=1. \tag{27}$$

这样，对于所有 $x$ 的值我们有很重要的关系式

$$\exp(x)\exp(-x)=1. \tag{28}$$

于是，我们证明了，对任意 $x$ 的值，$\omega_n(x)$ 的值当 $n\to\infty$ 时趋近于确定的极限，所以能够说

$$\exp(x)=\lim_{n\to\infty}\omega_n(x). \tag{29}$$

由公式(18)得出，当 $|x|\leqslant 1$ 时有

$$\exp(x)=1+x+r(x),\ \text{其中}\ |r(x)|<x^2. \tag{30}$$

**函数 $\exp(x)$ 的基本性质** 证明函数 $\exp(x)$ 的下列重要性质是成立的。如果 $x$ 和 $y$ 是两个实数，那么我们有关系式

$$\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y). \tag{31}$$

为了证明这个重要的等式，我们构造函数 $\omega_n(x)$ 和 $\omega_n(y)$ 的积。得到

$$\omega_n(x)\omega_n(y)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n. \tag{32}$$

我们有

$$1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}=\left(1+\frac{x+y}{n}\right)\left(1+\frac{xy}{n(n+x+y)}\right)$$

$$=\left(1+\frac{x+y}{n}\right)\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right), \tag{33}$$

其中
$$\xi_n=\frac{xy}{n+x+y}. \tag{34}$$

由公式(32)和(33)得

$$\omega_n(x)\omega_n(y)=\omega_n(x+y)\omega_n(\xi_n). \tag{35}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(\xi_n)=1$（见(20)）。这样，在关系式(35)中当 $n\to\infty$ 时取极限，得

$$\exp(x)\ \exp(y)=\exp(x+y).$$

因此，关系式(31)被证明。

对两个因式已证明的这个关系式，显然对任意个数的因式也是正确的。所有的因式被认为是相同的，我们就得出关系式

$$(\exp(x))^p=\exp(px), \tag{36}$$

其中 $p$ 是自然数。由这个关系式和关系式(27)、(28)，得出关系式

$$(\exp(x))^p=\exp(px), \tag{37}$$

其中 $p$ 是任意整数。在这个关系式中用整数 $q$ 代替整数 $p$，而 $px=qx$ 用 $y$ 代替，得到关系式

$$\left(\exp\left(\frac{y}{q}\right)\right)^q=\exp(y), \tag{38}$$

故得

$$\exp\left(\frac{y}{q}\right)=(\exp(y))^{\frac{1}{q}}. \tag{39}$$

把最后的关系式乘 $p$ 次方，得

$$\left(\exp\left(\frac{y}{q}\right)\right)^p=(\exp(y))^{\frac{p}{q}}. \tag{40}$$

由关系式(36)，这个等式的左边可以改写为

$$\left(\exp\left(\frac{y}{q}\right)\right)^p=\exp\left(\frac{p}{q}y\right). \tag{41}$$

因此，最后得到

$$\exp\left(\frac{p}{q}y\right)=(\exp(y))^{\frac{p}{q}}. \tag{42}$$

在这个关系式中用 $x$ 代替 $y$，并令 $r=\frac{p}{q}$，得到最终的公式

$$\exp(rx)=(\exp(x))^{r}, \tag{43}$$

其中 $r$ 是任意有理数。

**数 $e$ 与函数 $e^x$** 按定义我们认为数 $e$ 是由等式

$$e=\exp(1) \tag{44}$$

给出。因此有

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}. \tag{45}$$

这就是通常大家所公认的数 $e$ 的定义。令关系式 (43) 中的 $x=1$，得

$$\exp(r)=e^{r}, \tag{46}$$

其中 $r$ 是任意有理数。这样，我们规定了对任意有理数 $r$，函数 $\exp(r)$ 不是别的什么，而是值 $e^r$，其中对引入的有理指数 $r$，象在代数中一样去理解。对于任意不一定是有理数的 $x$，等式

$$e^{x}=\exp(x) \tag{47}$$

是函数 $e^x$ 的定义。关系式 (47) 的右边对我们来说已经被定义了。最初对有理数 $x$ 纯代数地定义过的函数 $e^x$，在公式 (47) 被确定以前，它的含义已是对任意实数 $x$，不一定是对有理数来说的。函数 $e^x$ 对实数值 $x$ 的这样的定义是唯一合理的。这样，在这个构造的结果中得到的函数 $e^x$ 具有很好的性质。这些性质如下：

$$e^{0}=1,\ e^{x}e^{y}=e^{x+y}. \tag{48}$$

由函数 $\exp(x)$ 的性质 (27) 和 (31) 得出函数 $e^x$ 的这些性质，函数 $e^x$ 同函数 $\exp(x)$ 完全相同。此外，函数 $e^x$ 具有导数。顺便给出它的计算。

**函数 $e^x$ 的导数**　在 $e^x$ 的导数的定义中，我们利用§1中的公式(21)，这时令

$$\xi = x + h. \tag{49}$$

因此，

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}. \tag{50}$$

因为 $h$ 是很小的量，则当计算函数 $e^h$ 时可以利用公式(30)，所以得到

$$e^h = 1 + h + r(h),$$

其中

$$|r(h)| < h^2. \tag{51}$$

由此得出

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \tag{52}$$

这样，由公式(50)得出

$$(e^x)' = e^x. \tag{53}$$

于是，函数 $e^x$ 的导数被算出。它具有这样值得注意的性质，同函数 $e^x$ 本身完全一样。函数 $Ce^x$ 也具有同样的性质，其中 $C$ 是常数。即

$$(Ce^x)' = Ce^x. \tag{54}$$

判断满足方程

$$f'(x) = f(x) \tag{55}$$

的任何函数 $f(x)$ 具有形式

$$f(x) = Ce^x. \tag{56}$$

证明在§11的练习题3中给出。

# § 11.

## 函 数 lnx

注意到今后符号的变更，为了不引起混乱，使用希腊字母表示变量。研究方程

$$\eta = e^{\xi}. \tag{1}$$

当已知$\eta$的值时，这个方程关于未知量$\xi$的解叫做值$\eta$的自然对数，标记为

$$\xi = \ln\eta. \tag{2}$$

应该首先阐明，对于什么样的$\eta$值，方程(1)对于未知量$\xi$有解。首先指出，$e^{\xi}$总是正值，这一点从它的定义中可以得出。这样，方程(1)仅在$\eta>0$的情况下可解。为了进一步研究方程(1)，应该把$\xi$放在横坐标轴一边，而把$\eta$放在纵坐标轴一边，作出函数(1)的图象。因为数$e$包含在数2和3之间，则当$\xi$增加时函数$e^{\xi}$比函数$2^{\xi}$增长得快。为了形成函数$2^{\xi}$增长的那个速度本身的概念，我想起一个有名的故事。象棋游戏的发明家从波斯将军那里请求过下列奖赏。他说："往棋盘的第一个方格里放一粒大米，往第二个方格里放两粒大米，往第三个方格里放四粒大米，在往下每一个方格里放的大米数比前一个方格里放的大米多一倍"。因为棋盘的方格总数是64，则大米的总粒数是几何级数的和

$$1+2+2^2+\cdots+2^k+\cdots+2^{63}.$$

这个级数的和由§9公式(14)给出，等于$2^{64}-1$。当试图计算这个数时得到那样骇人听闻的结果，如果我没弄错的话，那样的大米数量在地球上是根本没有的。因此，函数$e^{\xi}$当$\xi\to$

$+\infty$ 时是趋向于增加的。同样，当 $\xi\to-\infty$ 时，它急速地减少到零。所以函数 $e^{\xi}$ 的导数对任意的 $\xi$ 都是正的（见§10（53）），那么函数 $e^{\xi}$ 在整个区间 $-\infty<\xi<+\infty$ 上是增加的。由此可见，方程（1）对任何正的 $\eta$ 有解并且是唯一的。

现在我们转到更加自然的符号。研究方程

$$e^{y}=x \tag{3}$$

和所求方程的解 $y=\varphi(x)$。我们已经指出了函数

$$\varphi(x)=\ln x \tag{4}$$

对任何正的 $x$ 已被定义。从等式（3）两边各对 $x$ 求导数，认为 $y=\varphi(x)$，等式左边作为复合函数求导数（见§5,（16））。则由这个公式得到

$$(e^{y})'\cdot\varphi'(x)=1, \tag{5}$$

其中在 $(e^{y})'$ 的表示中必须用 $\varphi(x)$ 代替 $y$。因为

$$(e^{y})'=e^{y}=e^{\varphi(x)}=x,$$

则我们得到对 $\varphi'(x)$ 的表达式

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}. \tag{6}$$

这里，$\varphi(x)$ 是 $x$ 的自然对数，因而，$\ln x$ 的导数由公式

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \tag{7}$$

确定。

# § 12.

## 函数$e^x$的级数展开式

在 § 10 中得到的公式给出函数 $e^x$ 按级数的幂展开的可能性。

由 § 10 公式(6)得

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(k) = 1. \tag{1}$$

现在选取 $p$，使 $p+1>10|x|$。这时由 § 10 的公式(12)得

$$\frac{\gamma_n(k)}{k!}|x|^k \leqslant \frac{|x|^p}{p!}\cdot\frac{1}{10^{k-p}}.$$

当 $n\to\infty$ 时取极限，得

$$\frac{|x|^k}{k!} \leqslant \frac{|x|^p}{p!}\cdot\frac{1}{10^{k-p}}, \tag{2}$$

因为在 $x$ 固定时，$p$ 也是确定的数，那么由公式(2)得出，当 $k$ 无限增大时，值$\frac{|x|^k}{k!}$趋近于零。这样，在确定的 $x$ 中找到足够大的值 $q$，

当 $k\geqslant q$ 时，
$$\frac{|x|^k}{k!}<1. \tag{3}$$

虽然在这个关系式的证明中，我们利用了自然数 $p$ 确定的选取方法，但最终的结果(3)并不依赖于这个选取。

现在认为 § 10 公式 (16) 中的 $p>q$。从这个公式中我们得出

$$|r_n(p,x)| < \frac{|x|^p}{p!}\cdot\frac{|x|}{p+1-|x|} < \frac{|x|}{p+1-|x|}.$$

由 § 10 公式(13)，现在得出

$$|\omega_n(x)-s_n(p,x)|<\frac{|x|}{p+1-|x|}. \tag{4}$$

由 § 10 公式(14)和本节公式(1)得出，当 $n\to\infty$ 时在不等式(4)中取极限，得

$$\left|e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}\right)\right|<\frac{|x|}{p+1-|x|}.$$

当 $p$ 无限增加时，因为这个不等式的右边趋近于零，则这个不等式表示 $e^x$ 展开为无穷级数

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}+\cdots. \tag{5}$$

当 $x=1$ 时，得

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{p!}+\cdots. \tag{6}$$

公式(6)和(5)对计算数 $e$ 和函数 $e^x$ 是方便的。

# §13.

## 跋.关于极限理论

亲身的经验使我相信，最初认识数学分析时不应该从研究极限理论开始. 当我还是中学生的时候，就十分完好地掌握了微积分学的基础，我利用它们解答问题时甚至还不知道极限理论的存在，而仅在大学一年级中我才知道它的存在，而这一点又曾使我非常惊奇. 历史上积分和微分的运算，在极限理论出现以前，已经成为数学的发达部分. 以后极限理论是在已经存在的理论之上作为某种提高而产生的. 许多物理学家认为，被称为导数和积分的严格的定义，对于很好地理解微积分学是完全没有必要的. 我分辨他们的观点. 认为在中学里从极限理论开始研究数学分析，应该完全限于在最后，也不能引导到任何一个内容丰富的结果. 如果必须认识极限理论，则它应该在已经认识了内容丰富的分析结果之后给出. 因此仅在跋中，我给出极限理论很不正规的但很直观的描述.

**极限理论**　极限的概念总是与研究某一函数 $f(\xi)$ 的性状联系着，函数 $f(\xi)$ 又与它的自变量 $\xi$ 的性状有关. 这时，函数 $f(\xi)$ 的性状与自变量 $\xi$ 的性状的相互联系具有特殊的性质. 提出以下问题：当变量 $\xi$ 无限地趋近于某一常数值 $x$ 时，$f(\xi)$ 的值本身作怎样的变化. 如果在量 $\xi$ 趋近于常数 $x$ 的过程中，变量 $f(\xi)$ 也趋近于某一常量 $f_0$（我们没有假定当 $\xi=x$ 时函数 $f(\xi)$ 已确定），则可认为，当 $\xi\to x$ 时，函数 $f(\xi)$ 趋近于极限 $f_0$. 这一点以公式的形式可记为：

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = f_0. \tag{1}$$

为了不给形式的定义，而仅给出直观的描写，我们应该想象，$\xi$ 是量 $x$ 的近似值，这个近似的精确度按 $\xi$ 趋近于 $x$ 的程度而增加。正是这样，$f(\xi)$ 的值应该看作为值 $f_0$ 的近似值，并且近似的精确度按量 $\xi$ 趋近于 $x$ 的精确度增加的程度而增加。

当这样直观地描述时，很容易明白极限变换的基本法则。如果有两个函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$，并且满足条件

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = f_0,\ \lim_{\xi\to x} g(\xi) = g_0, \tag{2}$$

即当 $\xi$ 变为越来越精确地趋近于值 $x$ 时，量 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 越来越精确地趋近于值 $f_0$ 和 $g_0$，那么显然，和 $f_0+g_0$ 的近似值由和 $f(\xi)+g(\xi)$ 给出。这个近似的精确度随着量 $f(\xi)$ 的近似值 $f_0$ 和量 $g(\xi)$ 的近似值 $g_0$ 的精确度的提高而提高。由此得出极限理论的第一个法则

$$\lim_{\xi\to x}(f(\xi)+g(\xi)) = f_0+g_0 = \lim_{\xi\to x} f(\xi) + \lim_{\xi\to x} g(\xi). \tag{3}$$

同样的情况适用于乘积。很明显，积 $f(\xi)\cdot g(\xi)$ 是积 $f_0g_0$ 的近似值。这个近似的精确度随着量 $f(\xi)$ 的近似值 $f_0$ 和量 $g(\xi)$ 的近似值 $g_0$ 的精确度的增加而增加。由此得出极限理论的第二个法则

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi)g(\xi) = f_0g_0 = \lim_{\xi\to x} f(\xi)\cdot\lim_{\xi\to x} g(\xi). \tag{4}$$

在同样精确考虑的基础上，我们得到极限理论的第三个法则

$$\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f_0}{g_0} = \frac{\lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)}{\lim\limits_{\xi\to x} g(\xi)}. \tag{5}$$

这个公式是正确的，但是，仅仅在 $g_0\neq 0$ 的条件下成立。以下极限理论的最后一个法则是对不等式来说的。如果量 $f(\xi)$ 给出 $f_0$ 的越来越精确的近似值，并且总是不超过量 $g(\xi)$，$g(\xi)$

给出 $g_0$ 的越来越精确的近似值，那么很明显，$f_0 \leqslant g_0$，或者，按另一个方式，由关系式

$$f(\xi) \leqslant g(\xi) \tag{6}$$

得出关系式

$$f_0 \leqslant g_0$$

或者

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) \leqslant \lim_{\xi \to x} g(\xi). \tag{7}$$

某些另外的方式，但是很象极限理论的处理方法，在下述情况下出现：这时趋近于常数 $x$ 的变数 $\xi$ 不是函数的自变量，而无限增大的非负整数 $n$ 是函数的自变量，所以我们有函数 $f(n)$ 和 $g(n)$ 的情况，对这种函数通常给出某些另外的符号

$$f(n) = f_n, \quad g(n) = g_n. \tag{8}$$

在这里提出以下问题，当数 $n$ 无限增大时，值 $f_n$ 本身进行怎样的变化。如果证明，这时数 $f_n$ 无限趋近于数 $f_0$，便记为

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f_0. \tag{9}$$

如果除了这个关系式以外对第二个函数有类似的关系式成立

$$\lim_{n \to \infty} g_n = g_0, \tag{10}$$

则在这些直观设想的基础上，当研究函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 时这些设想成立，现在我们得出极限理论的基本法则。把它们摘录如下：

$$\lim_{n \to \infty} (f_n + g_n) = \lim_{n \to \infty} f_n + \lim_{n \to \infty} g_n, \tag{11}$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n g_n = \lim_{n \to \infty} f_n \lim_{n \to \infty} g_n, \tag{12}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{g_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} f_n}{\lim\limits_{n \to \infty} g_n}. \tag{13}$$

仅当$\lim\limits_{n\to\infty} g_n \neq 0$时，公式(13)才是正确的。

由关系式$f_n \leqslant g_n$得出$\lim\limits_{n\to\infty} f_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} g_n$。

**连续函数** 为了确定连续函数的概念，要利用极限变化的概念。即对自变量的值$\xi = x$同样被定义的函数$f(\xi)$，如果满足关系式

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x),$$

就认为在自变量的值$\xi = x$处是连续的。

如果函数$f(x)$对自己的自变量$x$的每一个值都是连续的，则函数$f(\xi)$自然被认为是连续的。如果函数$g(\xi)$是第二个连续函数，则由法则一、二、三得出，函数的和$f(\xi)+g(\xi)$是连续的，函数的积$f(\xi)g(\xi)$是连续的，函数的商$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$是连续的，仅仅除去使$g(x)=0$的那些值。

在小册子中研究的所有函数当然是连续的，不用说也是有导数的，但是在每一步中都说明这一点，我认为是没有必要的。这一点应该是指很快地或者自然而然地可以感觉到。

# 练 习 题

## §1 练习题

我们首先指出导数计算的某些方法. 根据§1, 函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 由关系式

$$f'(x)=\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} \qquad (1)$$

确定. 这样,为了求出函数 $f(x)$ 的导数,应该研究商式

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}, \qquad (2)$$

当 $x$ 是常数而 $\xi$ 无限趋近于 $x$ 时, 看这个商式本身怎样变化. 如果商式(2)趋近于某一个确定的极限,那么这个极限用 $f'(x)$ 标记,就是函数 $f(x)$ 的导数. 关系式(2)的最简单的极限, 在它的分子 $f(\xi)-f(x)$ 能直接除以 $\xi-x$ 的情况下计算. 这时为了变出极限, 在得出的商式中用 $x$ 代替 $\xi$ 就行了, 我们便得到导数 $f'(x)$. 如果在 $f(\xi)-f(x)$ 的表示式中能够提取两项的因子 $\xi-x$, 这就成功了. 因为提取两项的因子不是很简单的代数运算, 我们为了能提取一项的因子, 则适当变换符号. 为此, 令

$$h=\xi-x, \qquad (3)$$

或者同一个关系,

$$\xi=x+h. \qquad (4)$$

显然,当 $\xi\to x$ 时 $h\to 0$. 这样,在新的符号里定义(1)改记为

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (5)$$

我们指出,$h$ 叫做自变量 $x$ 的改变量,而差

$$f(x+h)-f(x) \qquad (6)$$

叫做对应的函数的改变量. 如果在表示式(6)中, 我们能够把因子 $h$ 提到括号外面, 则它除以 $h$ 就是简单的代数运算, 由于这一点, 为求极限

(6)，在得到的商式中用0代替 $h$ 就足够了．如果 $f(x)$ 是 $x$ 的有理函数，则很好地使用这个方法，但在有根号的情况下也可以使用这方法．例如，如果差式(6)能够记为 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$，其中 $a$、$b$ 是有理表达式，则这个差式乘以并除以和 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$，我们得到

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

表达式 $a-b$ 已经不含有无理性并能够分出 $\xi-x$ 或 $h$，这取决于我们利用导数的定义(1)或定义(5)．

利用这些方法，求由下列各式给出的函数 $f(x)$ 的导数．

**练习题 1** $f(x)=ax^2+bx+c$．

〔答案〕 $f'(x)=2ax+b$．

**练习题 2** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$．

〔答案〕 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$．

**练习题 3** $f(x)=\frac{1}{x}$．

〔答案〕 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$．

**练习题 4** $f(x)=\frac{1}{x^2}$．

〔答案〕 $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$．

**练习题 5** $f(x)=\frac{x-a}{x-b}$．

〔答案〕 $f'(x)=\frac{a-b}{(x-b)^2}$．

**练习题 6** $f(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}$．

〔答案〕 $f'(x)=-\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^2}$．

**练习题 7** $f(x)=\sqrt{x}$．

〔答案〕 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$．

**练习题 8**　$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

〔答案〕　$f'(x)=\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

## §2　练习题

多项式导数的计算法则，简单到不论给出多少有趣的难题总能解决．因此，这里我们仅给出两个练习题，并且第二个练习题在以后将被利用．计算下列两个多项式的导数．

**练习题 1**　$f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$.

〔答案〕　$f'(x)=4(x^3+3x^2+3x+1)$.

**练练题 2**　$f(x)=3x^5-5(a^2+b^2)x^3+15a^2b^2x$.

〔答案〕　$f'(x)=15[x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2]$.

## §3　练习题

研究下列多项式 $f(x)$．确定多项式 $f(x)$ 的递增和递减区间，当多项式 $f(x)$ 具有极大值和极小值时，同样求出所有的 $x$ 值，并把它们彼此区别开来．

**练习题 1**　$f(x)=x^4-px^2+q$.

〔答案〕　当 $p\leqslant 0$ 时，多项式 $f(x)$ 在 $-\infty<x\leqslant 0$ 的情况下是递减的，而在 $0\leqslant x<\infty$ 的情况下是递增的．在点 $x=0$ 处它达到自己的极小值．在这个点上，当 $p$ 是负数时多项式 $f(x)$ 的二阶导数是正的，当 $p=0$ 时多项式 $f(x)$ 的二阶导数等于零．这样，§3 中的条件(30)不是函数极小值的必要条件．当 $p$ 是正数时，多项式 $f(x)$ 在点 $x=0$ 达到自己的极大值，且当 $x=-\sqrt{\dfrac{p}{2}}$ 和 $x=\sqrt{\dfrac{p}{2}}$ 时有两个极小值．在区间 $-\infty<x\leqslant-\sqrt{\dfrac{p}{2}}$ 上这个多项式是递减的，在区间 $-\sqrt{\dfrac{p}{2}}\leqslant x\leqslant 0$ 上这个多项式是递增的，在区间 $0\leqslant x\leqslant\sqrt{\dfrac{p}{2}}$ 上这个多项式

重新递减，而在区间$\sqrt{\frac{p}{2}} \leqslant x < \infty$上这个多项式又重新递增．

**练习题 2**　$f(x)=3x^5-5(a^2+b^2)x^3+15a^2b^2x$（见§2 练习题 2）．

〔答案〕　我们认为数$a$和$b$是正的．为了确定起见假设$a>b$．多项式$f(x)$在区间$-\infty<x\leqslant -a$上是递增的．在区间$-a\leqslant x\leqslant -b$上是递减的，在区间$-b\leqslant x\leqslant b$上是递增的，在区间$b\leqslant x\leqslant a$上是递减的，在区间$a\leqslant x<\infty$上是递增的．在点$x=-a$，$x=b$上它有极大值，在点$x=-b$，$x=a$上它有极小值．

**练习题 3**　有一边长为$a$和$b$的长方形铁片，并且$a>b$．顺着该铁片的各角剪去边为$x<\frac{b}{2}$的正方形，把裁剪后的铁片的每一个突出部分往上弯成直角．这时得到一个盒子，它的底是边长为$a-2x$和$b-2x$的长方形，而高等于$x$，所以盒子的体积等于$x(a-2x)(b-2x)$．求当$x$取怎样的值时盒子的体积为极大值．

〔答案〕　$x=\frac{1}{6}(a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2})$．

在$a=b$的情况下，得到更加简单的解

$$x=\frac{a}{6}.$$

## §4　练习题

作出下列多项式$f(x)$的图象．

**练习题 1**　$f(x)=x^4-px^2+q$（见§3 练习题 1）．

〔答案〕　在§3 练习题 1 中，多项式$f(x)$已经作过充分的研究．现在只要说明在怎样的条件下它的图象与横坐标轴相交，即方程$f(x)=0$有实根以及有多少这样的根．

在$p\leqslant 0$的情况下，当$q>0$时方程$f(x)=0$没有实根，而当$q<0$时有两个实根．如果$p=0$、$q=0$，则有四重根$x=0$，而当$p<0$、$q=0$时$x=0$是二重根．

当$p>0$和$q<0$时有两个实根．当$p>0$、$q>0$时，如果$\frac{p^2}{4}-$

$q>0$，方程 $f(x)=0$ 有四个实根；如果 $\frac{p^2}{4}-q<0$ 没有实根；如果 $q>0$ 和 $\frac{p^2}{4}-q=0$，则有两个二重根 $x=\pm\sqrt{\frac{p}{2}}$；如果 $p>0$、$q=0$ 则有三个实根，其中有一个是二重根.

**练习题 2** $f(x)=3x^5-5(a^2+b^2)x^3+15a^2b^2x$（见 § 3 练习题 2）.

〔答案〕 在 § 3 练习题 2 中，在相当大的程度上已显露出多项式 $f(x)$ 的图象的形状. 现在只要阐明以下问题，在怎样的条件下，这个图象与横坐标轴交于一点 $x=0$ 或更多的点. 以后的情况是确定交点的个数.

如果 $\frac{a^2}{b^2}>5$，方程 $f(x)=0$ 有五个实根. 如果 $\frac{a^2}{b^2}<5$，有一个实根. 在 $\frac{a^2}{b^2}=5$ 的情况下有三个实根，其中有两个二重根.

## § 5 练习题

**练习题 1** 画出下列函数的图象：

$$y=\sin x,\quad y=\cos x.$$

求出函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的递减区间，以及每一个函数的极大值点和极小值点. 求出这两个函数的图象和横坐标轴的交点. 求出这些图象中的每一个拐点.

**练习题 2** 画出下述函数的图象：

$$y=\operatorname{tg} x.$$

〔答案〕 因为函数 $\operatorname{tg} x$ 是具有周期 $\pi$ 的周期函数，所以

$$\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg} x,$$

其中 $k$ 是任意整数，为了作出函数 $\operatorname{tg} x$ 的整个图象，只要作出它在区间 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 上的图象就足够了. 在这个区间上函数 $\operatorname{tg} x$ 从 $-\infty$ 到 $\infty$ 都是递增的，当 $x=0$ 时函数通过零点，即为函数图象的拐点. 为了作出函数 $\operatorname{tg} x$ 的整个图象，应该把已经作出的部分沿着横坐标轴平行移动量值 $k\pi$，其中 $k$ 是任意整数. 每一个这样的位移，都给出函数 $\operatorname{tg} x$

图象的一个不与其它分支相交的独立的分支.

**练习题 3** 画出函数

$$y=f(x)=\frac{a}{x}$$

的图象,其中 $a$ 是正数.

〔答案〕 当 $x=0$ 时,函数 $f(x)$没有定义,所以它由两个独立的分支组成:当 $x>0$ 时位于横坐标轴的上方,当 $x<0$ 时位于横坐标轴的下方.因为

$$\left(\frac{a}{x}\right)'=-\frac{a}{x^2},$$

所以在自己的两个分支中的每一个分支上,函数 $f(x)$都是递减的.我们更加注意研究它在 $x>0$ 时的情况.如果 $x$ 是作为正数而趋近于零,则函数 $f(x)$无限增大,所以它的图象趋近于纵坐标轴.当 $x$ 无限增大时,函数 $f(x)$趋近于零的情况正是这样,所以当 $x$ 增加时它的图象趋近于横坐标轴.$x$ 和 $y$ 之间的关系可以变为

$$xy=a.$$

这个方程确定的曲线,显然关于 I、III 象限的二等分线是对称的.

**练习题 4** 作出下述函数的图象:

$$y=f(x)=x^2\cos x.$$

〔答案〕 首先可以看出,函数 $f(x)$是偶函数,即 $f(-x)=f(x)$,因此这个函数的图象关于纵坐标轴为对称,所以只要作出 $x\geqslant 0$ 的图象就可以了.对正的 $x$ 值,函数 $x^2\cos x$ 的符号与函数 $\cos x$ 的符号一致.由此可以看出,当 $x>\frac{\pi}{2}$时,图象由与函数 $\cos x$ 的波类似的波组成,但这些波按 $x$ 增大的程度而增加,因为 $\cos x$ 乘以 $x^2$.显然,在位于横坐标轴上面的每一个波上,函数 $f(x)$达到极大值,而在位于横坐标轴下面的每一个波上,函数 $f(x)$ 达到自己的极小值.其次需要对区间 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 进行研究.在这个区间的端点上函数 $\cos x$ 变为零,因而函数 $f(x)$也变为零.在中间的 $x$ 值上函数 $f(x)$是非负的.当 $x=0$时,这个函数的图象通过坐标原点,$f(x)$ 达到自己的极小值.在区间 $0<$

$x<\frac{\pi}{2}$上，除了区间的端点之外函数 $f(x)$是正的，在区间的端点上函数变为零，于是在这个区间上它在某一点达到自己的极大值．为了求出函数 $f(x)$达到自己的极大值和极小值的那些 $x$ 的值，必须使它的导数等于零，即解方程

$$2x\cos x-x^2\sin x=0,$$

该等式除以 $x^2\cos x$，我们得到方程

$$\frac{2}{x}=\operatorname{tg} x.$$

为了求出 $f(x)$的极大值和极小值点，我们应该求出函数 $y=\frac{2}{x}$和 $y=\operatorname{tg} x$ 的图象的交点．因为函数$y=\frac{2}{x}$ 的图象当 $x$ 增大时压向横坐标轴，则当 $x$ 较大时方程$\frac{2}{x}=\operatorname{tg} x$ 的解与方程 $\operatorname{tg} x=0$的解近似相等，即近似等于数 $k\pi$，其中 $k$ 是整数．在几何上可以看出，方程$\frac{2}{x}=\operatorname{tg} x$ 的解实质上比数 $k\pi$ 多不了多少．由此可见，在函数 $f(x)$ 的图象的每一个分支上，这个函数或者大约在函数 $\cos x$ 达到极大值的那个位置上达到自己的极大值，或者大约在函数 $\cos x$ 达到极小值的那个位置上达到自己的极小值，仅在向右不大的位移处成立．

**练习题 5**　利用 §5 中给出的法则，计算 §1 练习题中指出的函数的导数．

计算下列函数的导数．

**练习题 6**　$f(x)=(\sin x)^n$.

〔答案〕　$f'(x)=n(\sin x)^{n-1}\cos x$.

**练习题 7**　$f(x)=\sin x^n$.

〔答案〕　$f'(x)=\cos x^n\cdot nx^{n-1}$.

**练习题 8**　$f(x)=\sqrt[n]{x}$.

〔答案〕　$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

**练习题 9**　以变量 $y$ 的某一函数 $\psi(y)$为出发点，它对变量 $y$ 的导

数我们照例表示为 $\psi'(y)$. 现在令 $y=ax$, 其中 $a$ 是常数. 在函数 $\psi(y)$ 中, 用 $ax$ 代替它的自变量 $y$, 我们得到变量 $x$ 的函数

$$f(x)=\psi(ax).$$

计算导数 $f'(x)$.

〔答案〕 $f'(x)=\psi'(ax)\cdot a$.

为了求出 $f'(x)$, 我们应该首先计算导数 $\psi'(y)$, 然后在其中用 $ax$ 代替 $y$, 并用常数 $a$ 乘以得到的表示式. 为了证明最后的公式, 应该利用 §5 中的公式(16). 由这个公式我们有

$$f'(x)=\psi'(ax)(ax)'=\psi'(ax)\cdot a.$$

**练习题 10** 以变量 $y$ 的函数 $\psi(y)$ 为出发点, 它对变量 $y$ 的导数照例表示为 $\psi'(y)$. 现在令 $y=x+a$. 用这个式子代替函数 $\psi(y)$ 中的 $y$, 我们得到函数

$$f(x)=\psi(x+a).$$

计算函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$.

〔答案〕 $f'(x)=\psi'(x+a)$.

这意味着, 为了计算导数 $f'(x)$ 应该计算函数 $\psi(y)$ 的导数 $\psi'(y)$, 然后在得到的表示式中用 $x+a$ 代替 $y$. 为了证明这一点, 我们应该利用 §5 的公式(16). 由这个公式我们有

$$f'(x)=\psi'(x+a)(x+a)'=\psi'(x+a).$$

**反函数** 在数学和它的应用中, 函数常常作为方程的解而被确定. 更重要的是下列情况. 以给定变量 $y$ 的函数 $\psi(y)$ 为出发点, 研究方程

$$\psi(y)=x, \tag{7}$$

其中 $x$ 是已知的, 即使是变化的量, 而 $y$ 总是未知的必须由这个方程确定的量. 因为 $x$ 进入方程, 则方程的解 $y$ 是 $x$ 的函数, 所以我们能够记为

$$y=\varphi(x). \tag{8}$$

这个解满足方程(7), 即应该有恒等式

$$\psi(\varphi(x))=x. \tag{9}$$

首先阐明充分条件, 在这条件下方程(7)对于 $y$ 是可解的. 我们分出变量 $y$ 的某一个区间

$$b_1 \leqslant y \leqslant b_2, \tag{10}$$

并允许区间(10)中所有的内值 $y$,即对满足条件

$$b_1 < y < b_2 \tag{11}$$

的所有的 $y$ 值,导数 $\psi'(y)$ 具有同一个符号，即满足下列两个关系式中的一个：或者

$$\text{当 } b_1 < y < b_2 \text{ 时,} \qquad \psi'(y) > 0 \tag{12}$$

或若

$$\text{当 } b_1 < y < b_2 \text{ 时,} \qquad \psi'(y) < 0. \tag{13}$$

现在令

$$a_1 = \psi(b_1), \quad a_2 = \psi(b_2). \tag{14}$$

在(12)式的情况下，函数 $\psi(y)$ 在区间 $[b_1, b_2]$ 上是增加的．在(13)式的情况下，函数 $\psi(y)$ 在区间 $[b_1, b_2]$ 上是减少的（见 § 3 ）．这样，在(12)式的情况下有 $a_1 < a_2$,而在(13)式的情况下,有 $a_2 < a_1$.

在(12)式的情况下，当 $y$ 通过区间 $[b_1, b_2]$ 时，量 $x = \psi(y)$ 通过整个区间 $[a_1, a_2]$，并且是递增的．在(13)式的情况下，当 $y$ 通过区间 $[b_1, b_2]$ 时,量 $x = \psi(y)$ 也通过整个区间 $[a_1, a_2]$，并且是递减的．这样，如果满足条件(12)或(13)，每一个 $x$ 的值对应由方程(7)得到的唯一的 $y$ 值，所以函数 $y = \varphi(x)$ 对位于区间 $[a_1, a_2]$ 上的所有的值都被确定．函数 $\varphi(x)$ 称为函数 $\psi(y)$ 的*反函数*.

为了使所有的研究赋有几何直观性，我们对几个非普通的形式作出函数 $\psi(y)$ 的图象．就是把自变量 $y$ 的值放在纵坐标轴一边，而把因变量 $x = \psi(y)$ 的值放在横坐标轴一边．这样得到的函数 $\psi(y)$ 的图象用 $L$ 标记．这个图象同时也是函数 $y = \varphi(x)$ 的图象.如果在作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图象时，我们把自变量 $x$ 放在横坐标轴一边，而把因变量 $y$ 放在纵坐标轴一边.

设 $p$ 是图形 $L$ 上的任意一点，而 $x$、$y$ 是它的横坐标和纵坐标,

$$p = (x, y).$$

$x$ 的值能够用值 $y$ 按公式(7)确定，而 $y$ 的值用值 $x$ 能够按公式(8)确定．我们从值 $y$ 开始．按公式(7)计算值 $x$．按公式(8)计算的值 $y$ 适合于得到的值 $x = \psi(y)$．这时我们得到

$$\varphi(\psi(y))=y. \tag{15}$$

这样，函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 由两个关系式联系：关系式(9)和关系式(15)。由此可见，函数 $\psi(y)$ 和 $\varphi(x)$ 之间的联系是相互的，所以这两个函数合理地称为*互为反函数*。

现在计算由方程(8)给出的函数 $\varphi(x)$ 的导数 $\varphi'(x)$。为此从恒等式(9)对 $x$ 求导数。右端的导数很明显，等于一个单位。我们按 §5 中的公式(16)作为复合函数的导数来计算左端的导数。这时得到

$$\psi'(y)\varphi'(x)=1.$$

因此得

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\psi'(y)}=\frac{1}{\psi'(\varphi(x))}.$$

这里，按公式(8)用 $x$ 表示 $y$，最后得出函数 $\varphi(x)$ 的导数 $\varphi'(x)$ 的公式

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\psi'(\varphi(x))}. \tag{16}$$

利用得到的结果计算反三角函数的导数，即函数 $\arcsin x$，$\arccos x$ 和 $\operatorname{arc\,tg} x$ 的导数。

**练习题 11** 以函数

$$\psi(y)=\sin y$$

为出发点并在区间

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$$

上研究这个函数。

因为
$$\sin' y=\cos y,$$

则对区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的所有内点有

$$\sin' y=\cos y>0.$$

在我们的情况下，

$$b_1=-\frac{\pi}{2},\quad b_2=\frac{\pi}{2},$$

$$a_1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1,\quad a_2=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=+1.$$

这样，方程(7)关于 $y$ 的解 $y=\varphi(x)$ 对属于区间

$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

的所有 $x$ 的值是确定的. 用 arc $\sin x$ 标记这个解. 因此有

$$\sin(\text{arc } \sin x)=x. \tag{17}$$

按早些证明的, 同时有关系式

$$\text{arc } \sin(\sin y)=y \tag{18}$$

成立. 问题在于利用公式(16)计算函数 arc $\sin x$ 的导数 arc $\sin' x$.

〔答案〕
$$\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{19}$$

在同样的情况下, 由公式(16)有

$$\text{arc } \sin' x=\frac{1}{\psi'(y)}=\frac{1}{\cos y}.$$

现在 $\cos y$ 的值必须表示为量 $x$ 的函数. 我们知道, $x=\sin y$, 由此得出

$$\cos y=\sqrt{1-x^2}.$$

最后得到关系式(19).

**练习题 12** 函数 arc $\cos x$ 由条件

$$\cos(\text{arc } \cos x)=x$$

确定. 计算函数 arc $\cos x$ 的导数 arc $\cos' x$.

〔答案〕
$$\text{arc } \cos' x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{20}$$

**练习题 13** 函数 arc $\operatorname{tg} x$ 由条件

$$\operatorname{tg}(\text{arc } \operatorname{tg} x)=x$$

确定, 其中仅研究解 $|\text{arc } \operatorname{tg} x|<\frac{\pi}{2}$. 利用公式(16)计算函数 arc $\operatorname{tg} x$ 的导数 arc $\operatorname{tg}' x$.

〔答案〕
$$\text{arc } \operatorname{tg}' x=\frac{1}{1+x^2}. \tag{21}$$

**练习题 14** 计算函数

$$f(x)=\text{arc } \sin x+x\sqrt{1-x^2} \tag{22}$$

的导数.

〔答案〕
$$f'(x)=2\sqrt{1-x^2}. \tag{23}$$

## § 6 练习题

**练习题 1** 求函数 $f(x)=x^3-px$ 的原函数 $h(x)$.

〔答案〕
$$h(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{p}{2}x^2.$$

**练习题 2** 求函数 $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ 的原函数 $h(x)$.

〔答案〕
$$h(x)=\frac{r^2}{2}\text{arc }\sin\frac{x}{r}+\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}. \tag{24}$$

为了证明，令

$$\psi(y)=\text{arc }\sin y+y\sqrt{1-y^2}.$$

由公式(23)有

$$\psi'(y)=2\sqrt{1-y^2}. \tag{25}$$

现在计算函数 $\psi\left(\frac{x}{r}\right)$ 的导数. 由 § 5 练习题 9 的公式我们有

$$\left(\psi\left(\frac{x}{r}\right)\right)'=\frac{1}{r}\psi'\left(\frac{x}{r}\right).$$

由此得出公式(24)的正确性.

**练习题 3** 微分方程在数学的应用中，起着很大作用. 在这些方程中，函数是未知的，而进入方程的不仅是函数本身，而且还有它的导数. 方程

$$f''(t)+\omega^2 f(t)=0 \tag{26}$$

是比较简单而重要的方程之一. 这里自变量用 $t$ 表示，而 $f(t)$ 是未知的函数. 这个方程是在力学中产生的. 研究质点的直线运动时，把横坐标轴作为这条直线. 用 $x$ 表示运动质点的横坐标. 这个质点的运动由方程

$$x=f(t)$$

给出，其中 $t$ 是时间，而 $x$ 是质点在时刻 $t$ 的横坐标. 我们研究质量为 $m$ 的质点 $x$ 的运动，它处在指向坐标原点的引力的作用下，并且这个力和质点离开原点的值成正比，所以这个力等于 $kx$，其中 $k$ 是不变的正比例系数. 则由力学定律我们有

$$mf''(t)=-kf(t).$$

上式左边是质量乘以质点的加速度，而右边是作用力的值．用 $\omega^2$ 标记正值 $\frac{k}{m}$，可以把上面的方程改记为(26)的形式．我们的问题在于求出方程 (26) 的解，确切地说，求这个方程的所有的解，因为存在的不只是一个解．

〔答案〕 方程(26)的任一解记为

$$f(t)=a\sin(\omega t+\alpha), \tag{27}$$

其中 $a$ 和 $\alpha$ 是任意常数．我们证明这个结论．首先，简化方程(26)，引入新的自变量 $\tau=\omega t$ 并用 $\psi(\tau)$ 标记新的未知函数，所以有

$$f(t)=\psi(\tau)=\psi(\omega t),$$

因此

$$f'(t)=(\psi(\omega t))'=\omega\psi'(\tau).$$

其次，有

$$f''(t)=\omega^2\psi''(\tau).$$

现在方程(26)重记为形式

$$\omega^2\psi''(\tau)+\omega^2\psi(\tau)=0,$$

或另一形式

$$\psi''(\tau)+\psi(\tau)=0. \tag{28}$$

这个方程乘以 $2\psi'(\tau)$，得

$$2\psi'(\tau)\psi''(\tau)+2\psi(\tau)\psi'(\tau)=0.$$

容易验证，这个方程的左边是函数

$$(\psi'(\tau))^2+(\psi(\tau))^2$$

的原函数．因为这个函数的导数等于零，所以它是常数，并且是非负的．这样，由方程(28)得出等式

$$(\psi'(\tau))^2+(\psi(\tau))^2=a^2,$$

其中 $a$ 是非负常数．当 $a=0$ 时，函数 $\psi(\tau)$ 恒等于零．当 $a>0$ 时，我们引入新的未知函数

$$\varphi(\tau)=\frac{\psi(\tau)}{a}.$$

这时对于函数 $\varphi(\tau)$ 得到方程

$$(\varphi'(\tau))^2+(\varphi(\tau))^2=1.$$

由此得
$$(\varphi'(\tau))^2=1-(\varphi(\tau))^2.$$

其次
$$\frac{(\varphi'(\tau))^2}{1-(\varphi(\tau))^2}=1.$$

求出这个等式两边的平方根，得

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\sqrt{1-(\varphi(\tau))^2}}=\pm 1. \qquad (29)$$

这个等式的左边有原函数 $\arcsin\varphi(\tau)$（见 §5 公式 (16) 和 §5 练习题 11），右边是 $\pm\tau$ 的原函数．由方程(29)导出

$$\arcsin\varphi(\tau)=\pm\tau+\alpha,$$

其中 $\alpha$ 是任意常数．函数 $\varphi(\tau)$ 是这个方程的解，记为

$$\varphi(\tau)=\sin(\pm\tau+\alpha).$$

这里我们有两个不同的解

$$\varphi(\tau)=\sin(\tau+\alpha) \qquad (30)$$

和

$$\varphi(\tau)=\sin(-\tau+\alpha). \qquad (31)$$

实质上，解 (31) 能通过选择常数 $\alpha$ 的计算写为形式 (30)．其实，在解 (30) 中我们选取常数 $\alpha$ 为下列形式：

$$\alpha=-\beta+\pi,$$

其中 $\beta$ 仍然是任意常数．这时解(30)记为

$$\sin(\tau-\beta+\pi)=\sin(-\tau+\beta).$$

这样，由解(30)用变换常数的方法得到解(31)．于是，方程(29)的任意解记为

$$\varphi(\tau)=\sin(\tau+\alpha).$$

由此得出，

$$\psi(\tau)=a\sin(\tau+\alpha),$$

其次，

$$f(t)=a\sin(\omega t+\alpha).$$

于是，方程(26)的任意解记为形式(27)，其中 $a$ 和 $\alpha$ 是任意常数，并且

可以认为 $a$ 是非负的值. 方程

$$x=a\sin(\omega t+\alpha) \tag{32}$$

给出了点 $x$ 以振幅为 $a$ 和初相为 $\alpha$ 的振动. 如果令 $\omega=\frac{2\pi}{T}$, 则方程(32)变为

$$x=a\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right),$$

其中 $T$ 是振动(32)的周期.

## §7 练习题

**练习题 1** 研究方程

$$y=f(x)=x^3-px$$

给出的立方抛物线,其中 $p$为正数. 函数 $f(x)$的图象 $L$ 和横坐标轴相交于 $a_{-1}$、$a_0$、$a_1$ 三点, 这三点的横坐标相应地等于 $-\sqrt{p}$、0、$\sqrt{p}$. 从点 $a_{-1}$ 到点 $a_0$ 的曲线 $L$ 的弧记为 $L_1$. 弧 $L_1$ 在横坐标轴的上面,并和横坐标轴上的线段$[a_{-1}, a_0]$一起限定了平面的区域 $P$. 计算区域 $P$ 的面积 $S$.

〔答案〕 $S=\frac{p^2}{4}$.

由 §7 的公式(16)

$$S=\int_{-\sqrt{p}}^{0} f(t)dt. \tag{33}$$

因为函数

$$h(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{p}{2}x^2$$

是函数 $f(x)$ 的原函数,则定积分(33)记为

$$\int_{-\sqrt{p}}^{0} f(t)\,dt=h(0)-h(-\sqrt{p})=\frac{p^2}{4}.$$

因此,

$$S=\frac{p^2}{4}.$$

**练习题 2** 利用§7公式(16),计算半径为 $r$ 的圆面积 $S$.

〔答案〕 $S=\pi r^2$.

为了计算，选择半径为 $r$、圆心在坐标原点的圆．这时它的方程记为 $x^2+y^2=r^2$ 或者写成另一种形式 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$.

我们研究位于坐标平面第一象限中的那部分面积．圆上对应部分的方程记为 $y=f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$，其中 $x$ 由 0 变到 $r$．位于第一象限中那部分圆的面积记为定积分的形式

$$\int_0^r\sqrt{r^2-t^2}\,dt.$$

函数
$$h(x)=\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}$$
是函数 $f(x)$ 的原函数(见 §6 练习题 2)．因此，我们有

$$\int_0^r\sqrt{r^2-t^2}\,dt=h(r)-h(0)=r^2\cdot\frac{\pi}{4}.$$

于是，整个圆的面积等于 $\pi r^2$.

## §8 练习题

**练习题 1** 证明：无穷正项级数

$$S=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots \tag{34}$$

收敛，并计算它的和．

〔答案〕 $S=1$.

为了计算无穷级数(34)的和 $S$，我们组成前 $n$ 项的和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}. \tag{35}$$

作代换

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

由这个公式我们有

$$S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

当 $n$ 无限增大时和 $S_n$ 趋近于 1，因此，无穷级数(34)的和等于 1.

## § 10 练习题

**练习题 1** 证明：当 $x$ 无限增大时，函数

$$f(x)=\frac{e^x}{x^k}$$

总是趋向于无穷大，其中 $k$ 是任意自然数。

〔答案〕 按 §10 中的证明，

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

由此可得，

$$e^x>\gamma_n(k+1)\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

（见 §10 中的(7)）. 在这个关系式中，当 $n\to\infty$ 时取极限，得

$$e^x\geqslant\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

因此，当 $x$ 为正值时有

$$f(x)=\frac{e^x}{x^k}>\frac{x^{k+1}}{(k+1)!x^k}=\frac{x}{(k+1)!}.$$

显然，当 $x$ 趋向于无穷大时，上式右边趋向于无穷大，因而我们的论断被证明.

## § 11 练习题

**练习题 1** 证明：当 $x\to\infty$ 时，函数

$$f(x)=\frac{(\ln x)^k}{x}$$

趋近于零.

〔答案〕 在证明中利用 §10 练习题 1.

**练习题 2** 作出函数

$$y=f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

的图象.

〔答案〕 函数 $f(x)$ 在区间 $0<x\leqslant e$ 上变化，在 $-\infty<f(x)\leqslant\frac{1}{e}$

范围内是递增的，而后在区间 $e\leqslant x<\infty$ 上是递减的，并趋近于零。在点 $x=e$ 上函数达到极大值。

**练习题 3** 解微分方程

$$f'(x)=\lambda f(x), \tag{36}$$

其中 $f(x)$ 是未知函数，而 $\lambda$ 是确定的数。

〔答案〕

$$f(x)=ae^{\lambda x}, \tag{37}$$

其中 $a$ 是任意常量。在方程(36)的解中有解

$$f(x)\equiv 0.$$

如果方程(36)的解 $f(x)$ 不恒等于零，则选择变量 $x$ 的这样的区间 $b_1\leqslant x\leqslant b_2$，在这个区间的内部，函数 $f(x)$ 或者是正的，或者是负的。这时对满足条件 $b_1<x<b_2$ 的值 $x$，可把方程(36)除以 $f(x)$，得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\lambda. \tag{38}$$

在 $f(x)>0$ 的情况下，函数

$$h(x)=\ln f(x)$$

是方程(38)左边的原函数（见 §5(16) 和 §11(7)）。在 $f(x)<0$ 的情况下，函数

$$h(x)=\ln(-f(x))$$

是方程左边的原函数。对于方程(38)的右边，$\lambda x$ 是原函数。因此，无论是对正的函数 $f(x)$，也无论是对负的函数 $f(x)$，都有等式

$$\ln|f(x)|=\lambda x+C,$$

其中 $C$ 是常量。由此得

$$|f(x)|=e^{C}e^{\lambda x}$$

或另外的形式

$$f(x)=\pm e^{C}e^{\lambda x}=ae^{\lambda x},$$

其中 $a$ 是正的或者负的常数。

由此可以看出，在我们区间的端点 $b_1$、$b_2$ 上，函数 $f(x)$ 不能变为零，因此区间 $b_1\leqslant x\leqslant b_2$ 能够向保持函数 $f(x)$ 的符号的两边扩展。由此导出，对 $x$ 的所有值函数 $f(x)$ 保持不变号。因此公式(37)给出方程

(36)对所有 $x$ 值的解．对于 $a$，为了顾及到恒等于零的解，应该允许取 0 值．

## §13 练习题

**练习题 1** 证明：当 $x\to 0$ 时，函数 $\sin\frac{1}{x}$ 不趋近于任何一个极限．更完整地说，能够挑选收敛于零的正数

$$x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$$

的数列，使

$$\lim_{k\to\infty}\sin\frac{1}{x_k}=C,$$

其中 $C$ 是包含在 $-1$ 和 1 之间的任意数．

〔答案〕 令

$$x_k=\frac{1}{2k\pi+\alpha},$$

其中 $\alpha\geqslant 0$．显然，

$$\lim_{k\to\infty}x_k=0,\quad \text{而}\quad \lim_{k\to\infty}\sin\frac{1}{x_k}=\sin\alpha.$$

**练习题 2** 证明：函数

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x} \tag{39}$$

连续，但是当 $x=0$ 时没有导数．

〔答案〕 为了求出 $f'(0)$ 我们应该构造商

$$\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{\xi\sin\frac{1}{\xi}}{\xi}=\sin\frac{1}{\xi}, \tag{40}$$

但是，因为当 $\xi\to 0$ 时，函数 $\sin\frac{1}{\xi}$ 不趋近于任何极限(见练习题1)，所以当 $\xi\to 0$ 时，商式 (40) 不趋近于任何极限，因此当 $x=0$ 时，函数 (39) 没有导数．